



# Polymères Dirigés et Réseaux Conducteurs de Chaleur - Systèmes de mécanique statistique à l'équilibre et hors équilibre

Alain Camanes

## ► To cite this version:

Alain Camanes. Polymères Dirigés et Réseaux Conducteurs de Chaleur - Systèmes de mécanique statistique à l'équilibre et hors équilibre. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2008. Français. NNT : . tel-00344652

**HAL Id: tel-00344652**

**<https://theses.hal.science/tel-00344652>**

Submitted on 5 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES  
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DES MATHÉMATIQUES

Année : 2008

N° B.U. : 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**POLYMÈRES DIRIGÉS  
ET  
RÉSEAUX CONDUCTEURS DE CHALEUR**  
Systèmes de mécanique statistique à l'équilibre et hors équilibre

**Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes**

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

*Présentée et soutenue publiquement par*

**Alain CAMANES**

*le 02 décembre 2008, devant le jury ci-dessous*

<i>Président du jury</i>	:	Didier ROBERT	Professeur (Université de Nantes)
<i>Rapporteurs</i>	:	Francis COMETS	Professeur (Université de Paris-Diderot)
		Martin HAIRER	Professeur Associé (The University of Warwick)
<i>Examineurs</i>	:	Mihai GRADINARU	Professeur (Université de Rennes)
		Anne PHILIPPE	Professeur (Université de Nantes)
<i>Directeur de thèse</i>	:	Philippe CARMONA	Professeur (Université de Nantes)
<i>Laboratoire</i>	:	Laboratoire Jean Leray(UMR 6629 UN-CNRS-ECN)	

N° E.D. : 0503-011

---

---

# REMERCIEMENTS

---

Cette soutenance n'aurait pu avoir lieu sans la lecture attentive du manuscrit par Francis Comets et Martin Hairer. Je les remercie d'avoir porté autant d'attention à mes travaux et de m'avoir fait part de leurs précieuses remarques. Un grand merci à Mihai Gradinaru dont j'avais pu constater la disponibilité lors de ma première participation à un colloque de mathématiciens à Saint-Flour. Didier Robert a régulièrement assisté à mes exposés au séminaire des apprentis. Je le remercie de sa présence lors de ces séances et des discussions que nous avons eues. Je suis très honoré de sa présence en tant que président du jury. Anne Philippe m'a également accompagné durant cette thèse. Nous avons eu de longues discussions sur les stats, l'enseignement, la recherche... ces moments m'ont beaucoup apporté. Enfin, cette thèse n'aurait pu voir le jour sans l'attention constante que Philippe Carmona a prêtée à mes travaux. Je le remercie pour ses enseignements, sa rigueur scientifique, ses conseils pédagogiques, son intégrité ainsi que pour les nombreuses conversations que nous avons eues.

Un grand merci à Jean-Yves Leblin, Sabine Beaurain, Saïd El Mamouni et Philippe qui ont réglé les détails techniques de la visioconférence en un temps record.

Sans décrire toutes les rencontres scientifiques qui ont jalonné mon parcours, je tiens à remercier mon père qui m'a transmis sa curiosité alors que j'usais mes culottes sur les bancs de l'école primaire, M. Carrière qui a favorisé l'épanouissement de mon intérêt pour les mathématiques en classe de première, mes professeurs de prépa pour leur enseignement et l'École Normale Supérieure de Cachan qui par le statut de fonctionnaire stagiaire qu'elle procure m'a permis d'effectuer des études dans un environnement au meilleur niveau. Parmi Les différentes personnes croisées et recroisées durant les séminaires et écoles d'été, je pense spécialement à Florent Malrieu et Jean-Baptiste Bardet qui se sont toujours montrés intéressés par mon travail.

Un merci collectif au laboratoire de mathématiques de l'Université de Nantes qui m'a accueilli durant ces trois années. François qui apporte tant aux doctorants par sa constance au séminaire des apprentis. Sa curiosité, sa culture, ses questions sont irremplaçables. Brigitte, Annick, Martine, Colette, sont toujours prêtes à nous aider pour les tâches administratives. Leurs qualités humaines sont un réconfort quotidien. Danièle nous apporte un bol d'air extérieur très appréciable dans la grisaille de notre bureau. Claude, le grand maître de la bibliothèque, a toujours occasionné des pauses très agréables entre deux lectures. Enfin, un grand merci à Saïd l'informaticien, toujours prêt à nous dépanner.

Musicalement, les Fanfarons ont su m'accueillir et favoriser mon intégration dans

le laboratoire. Merci à Jean-Marc le clarinettiste-photocopieur de m'avoir invité à me joindre à vous. Nos échanges musicaux et extra-musicaux ont toujours été délicieux ! Merci à Pierre-Emmanuel le chef, Xavier, Nicolas, Blandine les flûtistes, François le marin-clarinettiste, Manu le violoniste pour leur présence hebdomadaire. Le sous-groupe by pass, discret pour l'instant mais ô combien distingué, a su m'initier à l'impro. Je continuerai volontiers à apprendre auprès de Friedrich au cuivre étincelant de bonté, Éric dont la virtuosité n'a d'égal que la sympathie, Rodolphe et Øystein le batteur norvégien. Une dédicace spéciale au duo Éric-Friedrich pour ses pauses café. Les longues taroinches, discussions, soirées passées avec Rodolphe m'ont permis d'apprécier sa compagnie et sa disponibilité.

Les thésards. Comment en quelques lignes évoquer tous ces bons moments ? Les anciens dont j'ai suivi les pas : Arnaud, Sébastien, Simon, Skander. Fanny avec qui j'ai débarqué à Nantes et qui a partagé mon bureau durant ces trois années. Alexandre dont l'entrain a égayé notre quotidien. Aymeric. Cette année passée dans le même bureau a consolidé une amitié naissante. Étienne, son humour, sa cuisine, sa petite femme Aline. Antoine, sa discrétion, son amitié. Vincent ses débats, ses coïncidences, ses discussions mathématiques. Manu l'initiateur de la taroinche. L'italien Arvid. Et les petits nouveaux : Nicolas le groupoïde, Ronan le statisticien blagueur, Simon l'algébriste sympathique, Carlos, Baptiste et Anne. Et Julien dont l'humour a rejoint le bureau 027. Un petit mot sur ces soirées passées à errer avec Archibald de Pommeraye de Hauteville (ce bon vieux Archi), Francis la brute farceuse, Bénédec le moine planant, Vlad le pingre, sous le regard bienveillant du gentil organisateur. Et hors de Nantes ? Mon passage à Toulouse m'a permis de rencontrer des amis formidables : Renaud, Martin, Benoît, Jérôme, Stéphane. Les rencontres cachanaises : Bertrand, Étienne, Mathieu, Nicolas, Vincent, Yoann. Les rencontres parisiennes : Rachel, Raph, Fabien. Évoluant dans d'autres domaines, nos discussions n'en sont que plus riches et animées.

Ces dernières lignes iront aux personnes qui me soutiennent depuis fort longtemps. Nelly et Virginie dont la venue à cette soutenance me fait chaud au cœur. Marie-Claude et Charles qui m'entourent depuis que je suis haut comme ça et qui ont pu se libérer, traverser la France et sont là aujourd'hui. Bernard, Geneviève, Stéphanie, Sébastien et Claire qui m'ont offert une place de choix au sein de leur famille. Leurs conseils avisés, leur amitié sont pour moi très importants. Mes grands-parents, ma soeur Isabelle avec qui je partage bien plus que mon goût pour les maths et mes parents ont su créer, durant toutes ces années, un environnement rassurant et entourant.

Merci à Christine... cette page est trop étroite et les mots me manquent pour que je puisse décrire tout le bonheur que tu fais naître dans notre quotidien.

---

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Les polymères dirigés en environnement aléatoire . . . . .	1
Les réseaux conducteurs de chaleur . . . . .	3
Quelques conventions . . . . .	5
<b>I Les polymères dirigés</b>	<b>7</b>
I.1 Introduction . . . . .	8
I.2 Une meilleure borne sur la température critique . . . . .	13
I.3 Le temps continu et l'équation d'Anderson parabolique . . . . .	31
<b>II Les réseaux conducteurs de chaleur</b>	<b>47</b>
II.1 Introduction . . . . .	48
II.2 Les oscillateurs harmoniques . . . . .	56
II.3 La régularité et l'unicité de la mesure invariante . . . . .	66
II.4 L'unicité : le principe de Lasalle . . . . .	79
II.5 L'unicité : la contrôlabilité . . . . .	86
II.6 L'existence de mesures invariantes . . . . .	94
<b>A Appendice</b>	<b>107</b>
1 Introduction . . . . .	107
2 The fractional moment method . . . . .	109
3 Proof of Theorem 1 . . . . .	112
4 Numerical Results . . . . .	114
<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>
<b>Table des figures</b>	<b>123</b>
<b>Index</b>	<b>126</b>



---

# INTRODUCTION

---

Nous présentons dans cette introduction les motivations, modèles et résultats obtenus dans cette thèse. Nous avons choisi de définir brièvement le formalisme mathématique dès maintenant sans entrer dans les détails. Les notations, références et résultats détaillés seront énoncés dans chacun des chapitres. Ainsi, chacun des chapitres pourra être lu indépendamment.

Cette thèse porte sur deux exemples issus de la mécanique statistique. La motivation principale est la compréhension mathématique du comportement de ces modèles. Les deux exemples traités portent sur deux questions bien distinctes en mécanique statistique : le comportement de systèmes à l'équilibre et hors équilibre ; nous verrons en particulier que les outils utilisés pour traiter ces questions diffèrent notablement.

D'une part, un système mécanique à l'équilibre à température  $T$  a une probabilité  $e^{H/T}/Z$  d'avoir une énergie  $H$ . La quantité  $e^{H/T}$  est appelée *facteur de Boltzmann* et la mesure de probabilité associée *mesure de Gibbs*. Cette mesure sera l'objet central du modèle des polymères dirigés, sujet du premier chapitre de cette thèse.

D'autre part, l'étude des systèmes mécaniques incite à se poser la question suivante : *étant donné un système mécanique, atteint-il un état stationnaire ?* Ainsi, si l'on place une barre métallique entre deux thermostats, comment va évoluer la température à l'intérieur de cette barre ? Va-t-on finir par observer un gradient de température à l'intérieur du matériau ? Cet état stationnaire sera-t-il unique ? Au bout de combien de temps va-t-on l'observer ? Pour répondre à ces questions, nous étudions les équations qui régissent le comportement des réseaux conducteurs de chaleur hors équilibre. Nous nous intéressons à la question de l'existence et de l'unicité d'un état stationnaire.

Dans les lignes qui suivent, nous présentons brièvement les résultats principaux qui seront développés dans le corps de la thèse.

## Les polymères dirigés en environnement aléatoire

Considérons une marche aléatoire  $\omega$  de longueur  $n$ , évoluant dans l'espace  $\mathbb{Z}^d$ . Tracer le graphe de la marche aléatoire en mettant en valeur sa dimension temporelle revient à tracer une succession de points dans  $\mathbb{Z}^{d+1}$  (voir la figure I.1). Cet ensemble de points est utilisé pour modéliser une succession de monomères, soit un polymère de longueur  $n$ . Ce polymère vit dans un environnement aléatoire. Ainsi, en tout point  $(i, x)$  de  $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ , la variable aléatoire  $g(i, x)$  représente la valeur de l'environnement. Intuitivement, on peut imaginer un polymère constitué d'une suite de monomères hydrophiles se trouvant



dans un mélange huile/eau. Le polymère va préférer les positions où ses monomères se trouvent sur des particules d'eau. Ainsi, nous allons définir l'énergie du polymère comme étant la somme des valeurs de l'environnement visité :  $H_n(\omega) = \sum_{i=1}^n g(i, \omega_i)$ . Supposons que  $g$  soit faible lorsqu'une goutte d'huile est présente, élevé lorsqu'il y a une goutte d'eau. Le polymère va donc se trouver préférentiellement dans des états d'énergie maximale.

La difficulté majeure de ce genre de modèles est sa non consistance. En effet, il se peut qu'un chemin optimal de longueur  $2n$  ne suive, lors de ses premiers pas, aucun des chemins optimaux de taille  $n$  : il vaut peut-être mieux sacrifier ses premiers monomères si l'on souhaite que les suivants se trouvent dans une majorité de sites aqueux.

Conformément au facteur de Boltzmann introduit ci-dessus, nous allons étudier, lorsque le nombre de monomères devient très grand, le facteur de Boltzmann moyen, appelé *fonction de partition*, pour une température  $T$  donnée,

$$Z_n(T) = \mathbf{P} \left[ e^{H_n/T} \right].$$

Nous pouvons dès à présent remarquer que 3 paramètres principaux vont régir le comportement du polymère : la température, la forme de l'environnement et la dimension  $d$  dans laquelle il évolue (rappelons que les marches aléatoires sont récurrentes en dimensions 1, 2 et transientes en dimensions supérieures).

Il a été démontré que, pour ce modèle de polymère, il existe une transition de phase. Lorsque la température est supérieure à une température critique  $T_c$ , le polymère ne tient pas compte de son environnement et son comportement est diffusif : il ressemble à celui d'une marche aléatoire. En deçà de la température critique, le polymère va se localiser sur des sites où l'environnement est élevé. La température  $T_c$  dépend de l'environnement et de la dimension. Un moyen de mieux comprendre cette température critique est d'utiliser la *méthode des répliques* ou *méthode du moment d'ordre 2*. Cette technique permet de trouver une borne supérieure  $T_2 \geq T_c$ .

La première partie sera consacrée à l'étude d'un critère permettant d'assurer que la température critique *n'est pas* la température  $T_2$ .

**Théorème (cf. Théorème I.1).** *En dimension  $d$  plus grande que 3, lorsque l'entropie du réseau sur lequel évolue le polymère est plus faible que l'entropie du milieu, la température critique est différente de la température  $T_2$ .*

La seconde partie de ce chapitre sera consacrée à l'étude de l'énergie libre. Cette étude sera effectuée dans le cadre de polymères à temps continu évoluant dans un environnement gaussien (nous noterons maintenant  $t$  la variable temporelle). Nous verrons comment l'étude de ces polymères permet de mieux comprendre la fonction de Lyapunov de l'équation d'Anderson parabolique. La démonstration que nous donnerons du théorème suivant présentera l'avantage d'être très succincte.

**Théorème (cf. Théorème I.4).** *Soient  $u_0$  une fonction bornée,  $u(t, x)$  la solution de l'équation (I.11) d'Anderson parabolique satisfaisant  $u(0, x) = u_0(x)$ . Il existe une fonction  $\gamma$  telle que, pour toute fonction bornée  $u_0$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln u(t, x) = \gamma.$$

Enfin, en notant  $p_t(T) = \frac{1}{t} \ln Z_t(T)$  l'énergie libre du système, nous montrerons l'équivalent asymptotique suivant via une méthode de changement d'échelle.

**Théorème (cf. Théorème I.3).** *Soit  $p(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_t(T)$ . Il existe une constante  $\alpha$  telle que lorsque  $T$  tend vers 0,*

$$p(T) \sim -\frac{\alpha^2}{8} \frac{1}{T^2 \ln T}.$$

## Les réseaux conducteurs de chaleur

Les réseaux conducteurs de chaleur modélisent un réseau d'atomes dont certains sont en contact avec des thermostats. Le réseau d'atomes sera représenté par un graphe connexe de sommets  $\mathcal{V}$  et d'arêtes  $\sim$ ; le sous-ensemble des atomes constitué des atomes reliés à un thermostat sera appelé bord du graphe et noté  $\partial\mathcal{V}$ . Nous supposons que tous les atomes sont de masse unité et nous noterons  $q_i$  (resp.  $p_i$ ) la position (resp. la quantité de mouvement) de l'atome  $i$ .

À ce réseau d'atomes est associée une énergie  $H$ . Naturellement,  $H$  est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. L'énergie potentielle est elle-même décomposée en deux parties : une partie d'interaction entre atomes voisins dépendant de la distance inter-atomes et une partie d'accrochage, chacun des atomes étant attiré vers sa position favorite. Ainsi, on définit

$$H(q, p) = \sum_i \frac{p_i^2}{2} + V(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{j \sim i} U(q_i - q_j).$$

Les potentiels d'interaction et d'accrochage  $U, V$  seront supposés attractifs, nous dirons qu'ils sont *confinants*, i.e.  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ .

En l'absence de contact avec les thermostats, l'évolution du système est décrite par une dynamique hamiltonienne. La quantité de mouvement est la dérivée de la position, l'accélération dérive de la force à laquelle est soumise la particule  $i \in \mathcal{V}$ ,

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \partial_{p_i} H = p_i, \\ \dot{p}_i &= -\partial_{q_i} H. \end{cases}$$

Considérons maintenant l'interaction entre atome et thermostat. On notera  $T_i$  la température du thermostat relié à l'atome  $i$ . Intuitivement, l'atome relié avec un thermostat est freiné par ce contact (le coefficient de frottement est noté  $\gamma_i$ ) alors que l'agitation moléculaire proportionnelle à la température de ce dernier engendre un terme de diffusion. Ainsi, pour tout atome  $i$  relié à un thermostat à température  $T_i$ , on remplace l'équation précédente par

$$dp_i(t) = -\partial_{q_i} H dt - \gamma_i p_i dt + \sqrt{T_i} dB_i(t),$$

où  $(B_i)_{i \in \partial\mathcal{V}}$  est une famille de mouvements browniens indépendants.

L'objectif de ce modèle est de montrer que la description précédente permet d'obtenir la loi de Fourier, c'est-à-dire que lorsque le système a atteint son état stationnaire, le courant de température traversant le réseau est proportionnel (via la conductance) au gradient de température. Nous nous sommes intéressés à l'existence et à l'unicité d'un tel état stationnaire. Mathématiquement, cela revient à répondre à la question : *la diffusion définie par l'équation différentielle stochastique précédente possède-t-elle une unique mesure de probabilité invariante ?*

Dans un premier temps, nous décrirons le cas où les potentiels sont harmoniques (i.e.  $U(x) = V(x) = x^2/2$ ). Nous définirons une condition algébrique permettant de vérifier que les thermostats sont disposés de manière asymétrique dans le réseau. Nous montrerons, via un théorème de point fixe, le théorème suivant.

**Théorème (cf. Théorème II.3).** *Supposons que les potentiels  $U, V$  soient harmoniques. Lorsque le graphe  $(\mathcal{V}, \sim, \partial\mathcal{V})$  satisfait la condition (II.6) d'asymétrie, le système converge exponentiellement vite vers un unique état d'équilibre. De plus, lorsque la condition d'asymétrie n'est pas satisfaite, il existe une quantité invariante par le flot hamiltonien qui permet de définir une infinité de mesures de probabilité invariantes.*

Remarquons dès à présent que la démonstration de ce théorème propose une manière constructive pour définir une infinité de mesures invariantes lorsque la condition d'asymétrie n'est pas satisfaite.

Nous utiliserons ensuite dans un premier temps le principe de Lasalle et la contraction de la diffusion, puis dans un deuxième temps une méthode de contrôlabilité faible pour montrer le théorème suivant.

**Théorème (cf. Théorème II.13).** *Lorsque le potentiel  $U$  est un monôme et  $V$  est un polynôme, si la disposition des thermostats dans le graphe est asymétrique, l'état d'équilibre, s'il existe, est unique.*

Enfin, nous généralisons les résultats d'existence d'une mesure invariante obtenus pour des chaînes d'oscillateurs au cadre des réseaux conducteurs de chaleur. Nous serons pour cela amenés à effectuer une hypothèse supplémentaire de rigidité : on supposera que lorsque les atomes du bord du réseau sont contraints à l'immobilité, le réseau est alors obligatoirement immobile.

**Théorème (cf. Théorème II.17 & Théorème II.20).** *Lorsque la condition (II.14) de rigidité est satisfaite et que le potentiel d'interaction est plus puissant que le potentiel d'accrochage, il existe un unique état stationnaire.*

*Lorsque le potentiel d'interaction est harmonique et le potentiel d'accrochage est deux fois plus fort, on ne pourra pas obtenir de convergence exponentielle vers la mesure invariante.*

On remarque cependant que la convergence exponentielle vers l'état d'équilibre n'a pu être obtenue lorsque le potentiel d'interaction est plus fort que le potentiel d'accrochage.

## Quelques conventions

Dans la suite de cette thèse, nous utiliserons les conventions de notation suivantes.

$u_n \asymp v_n$  : pour toutes suites de réels  $(u_n), (v_n)$ ,  $0 < \liminf \frac{u_n}{v_n} \leq \limsup \frac{u_n}{v_n} < +\infty$ .

$|A|$  : pour tout ensemble  $A$ ,  $|A|$  désigne son cardinal.

$\|x - y\|_1$  : pour tout couple de vecteurs  $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$ , désigne la norme 1,  $\sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$ .

$f \equiv c$  : pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^m$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(z) = c$ .

$(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  : la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

$\mathcal{B}(z, \varepsilon)$  : pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ , la boule de centre  $z$  et de rayon  $\varepsilon$ .

$[\cdot, \cdot]$  : pour tout couple de champs de vecteurs  $(X, Y)$ , on note  $[X, Y]$  le crochet de Lie entre  $X$  et  $Y$ ,  $[X, Y] = X(Y) - Y(X)$ .

$\overset{\circ}{A}$  : pour tout ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\overset{\circ}{A}$  désigne l'intérieur de  $A$ .

$\mathbb{N}_n, \mathbb{Z}_n$  : pour tout entier  $n$ ,  $\mathbb{N}_n = \{i \in \mathbb{N}, i \leq n\}$  et  $\mathbb{Z}_n = \{i \in \mathbb{Z}, |i| \leq n\}$ .



---

# I - LES POLYMÈRES DIRIGÉS

---

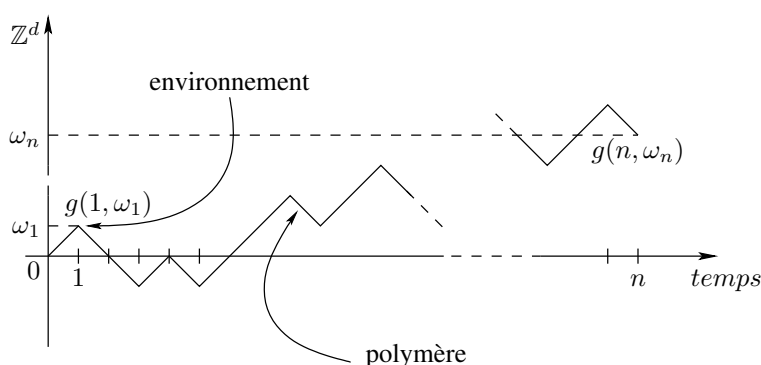


FIG. I.1 – Polymère dirigé dans  $\mathbb{Z}^d$

## Plan du chapitre

---

<b>I.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
I.1.1	Le modèle	8
I.1.2	Les transitions de phase	10
I.1.3	Plan du chapitre	12
<b>I.2</b>	<b>Une meilleure borne sur la température critique</b>	<b>13</b>
I.2.1	La méthode des moments fractionnaires	15
I.2.2	Une étude de fonction	18
I.2.3	La condition entropique : démonstration du Théorème I.1	22
I.2.4	L'environnement gaussien et la condition suffisante	25
I.2.5	Des exemples d'environnements	26
I.2.6	Programmes	27
<b>I.3</b>	<b>Le temps continu et l'équation d'Anderson parabolique</b>	<b>31</b>
I.3.1	Les polymères dirigés et l'équation d'Anderson parabolique	33
I.3.2	Quelques résultats de convergence	35
I.3.3	Le comportement asymptotique de l'énergie libre	41
I.3.4	Les solutions de l'équation d'Anderson parabolique	43

---

## I.1 Introduction

Les polymères dirigés en environnement aléatoire ont été introduits dans la littérature par D. Huse et C. Henley [HH85] pour modéliser l'interface dans un milieu aléatoire. Le formalisme mathématique a été introduit par J.Z. Imbrie et T. Spencer [IS88]. Il s'agit d'un modèle de marche aléatoire qui cherche à optimiser son trajet dans un environnement qui est également aléatoire. Nous proposons, dans cette partie, une description de l'interaction entre la marche aléatoire et son environnement. Nous rappelons ensuite les principaux théorèmes connus sur ce modèle. Enfin, nous terminons par un résumé des résultats que nous démontrons dans cette thèse.

### I.1.1 Le modèle

*Le polymère dirigé*

Notons  $\Omega_n$  l'ensemble des chemins de marches aléatoires dans  $\mathbb{Z}^d$ , i.e. l'ensemble des chemins issus de 0, de longueur  $n$ , dont les sauts sont de longueur 1,

$$\Omega_n = \left\{ \omega \in \left( \mathbb{Z}^d \right)^{n+1} ; \omega_0 = 0, \forall i = 1, \dots, n, \|\omega_i - \omega_{i-1}\|_1 = 1 \right\}.$$

Nous appellerons *polymère dirigé* tout chemin  $\omega \in \Omega_n$ . Nous évoquerons également le modèle des polymères dirigés évoluant sur des arbres, i.e. nous substituerons à  $\mathbb{Z}^d$  un arbre régulier à  $d$  branches et forcerons le polymère, à chacun de ses pas, à se diriger dans la direction opposée à la racine (cf. [BPP93] et figure I.2).

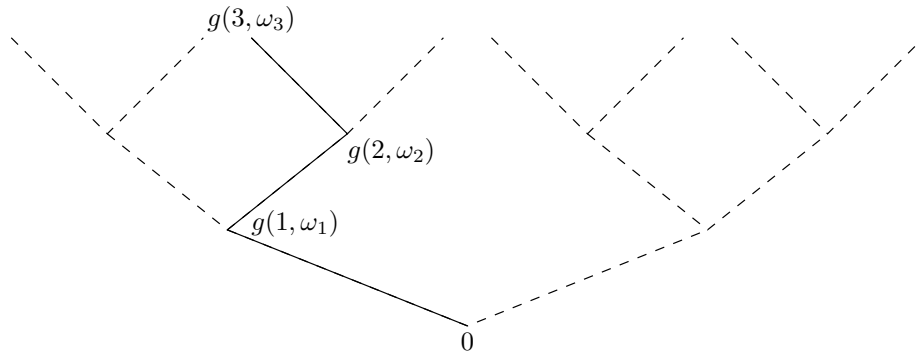


FIG. I.2 – Polymère sur un arbre régulier à 2 branches

*L'environnement aléatoire*

Le polymère évolue dans un *environnement aléatoire* noté  $(g(i, x))_{i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d}$ . Nous supposons dans la suite que ces variables sont indépendantes et suivent une même

## I.1. Introduction

---

loi de probabilité  $\mathbf{Q}$ . Pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$  nous appelons *cumulant* le logarithme de la transformée de Laplace de la loi de la variable aléatoire  $g$ ,

$$\lambda(\beta) = \ln \mathbf{Q} \left[ e^{\beta g} \right].$$

Nous supposons que cette quantité est finie pour tout  $\beta$  positif. Cette hypothèse permet d'utiliser les arguments génériques sur les martingales. Pour une autre approche issue de la percolation dirigée et permettant de supprimer en partie cette hypothèse, nous renvoyons le lecteur à l'article de V. Vargas (cf. [Var07] Theorem 3.1).

*Remarque.* Nous supposerons dans la suite que  $\beta$  est positif. En effet, lorsque  $\beta$  est négatif, il suffit de considérer l'environnement où  $-g$  est substitué à  $g$ .

Pour tout chemin  $\omega \in \Omega_n$ , nous définissons l'énergie associée au polymère comme étant la somme des valeurs de l'environnement qu'il visite. Cette quantité est appelée l'*hamiltonien* du système :

$$H_n(\omega) = \sum_{i=1}^n g(i, \omega_i).$$

### La fonction de partition

En notant  $\mathbf{P}$  la loi de la marche aléatoire simple, nous appelons *fonction de partition* du système la quantité

$$\begin{aligned} Z_n(\beta) &= \frac{1}{(2d)^n} \sum_{\omega \in \Omega_n} e^{\beta \sum_{i=1}^n g(i, \omega_i)} \\ &= \mathbf{P} \left[ e^{\beta H_n(\omega)} \right], \end{aligned}$$

où  $\beta$  désigne l'inverse de la température. Nous oublierons souvent la dépendance en  $\beta$  pour alléger les notations.

La fonction de partition permet de définir la *mesure polymère*  $\mu_n$  définie par

$$\mu_n(\cdot) = \frac{\mathbf{P} \left[ \cdot e^{\beta H_n} \right]}{Z_n(\beta)}.$$

### L'énergie libre

Une autre quantité importante permettant de décrire le comportement du polymère dirigé est l'*énergie libre* définie pour toute température inverse  $\beta \geq 0$  par :

$$p_n(\beta) = \frac{1}{n} \ln \left( Z_n(\beta) e^{-n\lambda(\beta)} \right).$$

D'un point de vue physique, la quantité ayant même dimension qu'une énergie est  $\frac{1}{n\beta} \ln Z_n(\beta)$ . Cependant, pour alléger notre propos, nous adopterons la notation précédente.



### I.1.2 Les transitions de phase

Nous résumons ci-dessous l'ensemble des résultats obtenus pour les polymères dirigés en environnement aléatoire qui motivent les différentes parties de cette thèse. La plupart de ces résultats sont rappelés avec leur démonstration dans l'article [CSY04].

#### *La fonction de partition*

E. Bolthausen (cf. [Bol89]) a remarqué que  $W_n = Z_n e^{-n\lambda(\beta)}$  est une martingale positive, donc cette quantité converge vers une variable aléatoire positive, finie presque sûrement, que nous noterons  $W_\infty$ . De plus, une version de la loi du 0 – 1 permet de montrer que pour tout  $\beta \in \mathbb{R}_+$  (cf. [Bol89] Lemma 2),

$$\mathbf{Q}(W_\infty = 0) \in \{0, 1\}.$$

En utilisant l'inégalité FKG (d'après Fortuin, Kasteleyn et Ginibre), F. Comets et N. Yoshida (cf. [CY06] Theorem 3.2) ont montré que la fonction  $\beta \mapsto \mathbf{Q}\left[\sqrt{W_\infty(\beta)}\right]$  est décroissante. Nous pouvons donc définir une température inverse critique  $\beta_c \in [0, +\infty]$  telle que

$$W_\infty(\beta) \begin{cases} > 0 \text{ } \mathbf{Q}\text{-p.s.} & , \text{ si } \beta < \beta_c \\ = 0 \text{ } \mathbf{Q}\text{-p.s.} & , \text{ si } \beta > \beta_c \end{cases}.$$

La zone  $\beta < \beta_c$  est appelée zone de *faible désordre*, la zone  $\beta > \beta_c$  est appelée zone de *fort désordre*. Pour comprendre dans un premier temps cette terminologie, on peut remarquer que lorsque  $\beta = 0$  (i.e. lorsque la température est infinie), le polymère se comporte comme une marche aléatoire simple. Tous les chemins ont alors la même probabilité, il n'y a pas de désordre, et  $W_\infty = 1$ .

Pour les dimensions 1 et 2, Ph. Carmona et Y. Hu (cf. [CH02] Theorem 1.1) dans le cadre d'un environnement gaussien (puis F. Comets et N. Yoshida, cf. [CSY03] Theorem 1.1, dans un environnement quelconque) ont montré que  $\beta_c = 0$ .

Pour caractériser la phase de faible désordre, Ph. Carmona et Y. Hu (cf. [CH02] Proposition 5.1) ont montré qu'il y a équivalence entre « se trouver dans la phase de faible désordre » et « la martingale  $(W_n)$  est uniformément intégrable ». Nous utiliserons cette propriété pour obtenir une meilleure description de la température inverse critique  $\beta_c$  dans la partie I.2, lorsque la dimension du réseau  $\mathbb{Z}^d$  est supérieure ou égale à 3.

L'intérêt de cette transition de phase réside dans un principe d'invariance. En effet, dans la phase de faible désordre, F. Comets et N. Yoshida (cf. [CY06] Theorem 1.2) ont montré que sous la mesure polymère, la marche aléatoire  $(\omega_n)_n$  se comporte lorsque  $n \rightarrow \infty$  comme un mouvement brownien. Son comportement est donc diffusif. D'autre part, lorsque le polymère se trouve dans la phase de fort désordre, les chemins se localisent (cf. [CH02] Theorem 1.1, [CSY04] Theorem 2.2.1 et [CH06] dans le cadre des polymères à temps continu), i.e. il existe une constante  $c_0 \in (0, 1)$  telle que pour deux marches aléatoires indépendantes  $\omega^1, \omega^2$ ,

$$\limsup \mu_{n-1}^{\otimes 2}(\omega_n^1 = \omega_n^2) \geq c_0.$$

### *L'énergie libre*

Dans l'article [Bol89], E. Bolthausen utilise la propriété de Markov des marches aléatoires et le fait que l'environnement est i.i.d. pour montrer, via le théorème de suradditivité qu'il existe une fonction  $p$  telle que

$$p_n(\beta) \xrightarrow{L^1} p(\beta).$$

Ph. Carmona et Y. Hu ([CH02], Proposition 1.4) ont également montré que  $p_n$  satisfait une égalité de concentration qui permet de passer de la convergence  $L^1$  précédente à la convergence presque sûre. Plus précisément, pour tout  $\nu > 1/2$ , il existe  $n_0 = n_0(\beta, \nu) \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\mathbf{P}(|\ln W_n - \mathbf{Q} \ln W_n| \geq n^\nu) \leq e^{-\frac{1}{4}n^{\frac{2\nu-1}{3}}}.$$

Enfin, comme pour la fonction de répartition, l'inégalité FKG (cf. [CY06] Theorem 1.1) permet de montrer que la fonction  $\beta \mapsto p(\beta)$  est décroissante.

Ainsi, il existe une constante  $\tilde{\beta}_c \in [0, +\infty]$  telle que  $p(\beta) = 0$  si  $\beta < \tilde{\beta}_c$ , et  $p(\beta) < 0$  si  $\beta > \tilde{\beta}_c$ . On remarque que lorsque  $W_\infty > 0$ ,  $p(\beta) = 0$ . Nous appellerons ainsi  $(0, \tilde{\beta}_c)$  la zone de *très faible désordre* et  $(\tilde{\beta}_c, +\infty)$  la zone de *très fort désordre*.

F. Comets et V. Vargas, dans [CV06] ont montré en utilisant les cascades (cf. [Liu98]) qu'en dimension 1, la température inverse critique  $\tilde{\beta}_c$  est nulle. Savoir si, quelle que soit la dimension, les phases de faible et très faible désordre coïncident (i.e. si  $\beta_c = \tilde{\beta}_c$ ) est à ce jour une question ouverte.

L'intérêt d'une bonne description de cette phase réside dans le résultat de localisation. Dans la phase de très fort désordre, les polymères se « concentrent » sur les sites où les environnements sont élevés. Plus précisément, on (cf. [CSY03] Corollary 2.2, [CH06]) montre que lorsque  $p(\beta) < 0$ , il existe une constante  $c \in (0, 1)$  telle que

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{k-1}(\omega_k^1 = \omega_k^2) \geq c.$$

V. Vargas [Var07] montre un résultat plus fort en considérant les  $\varepsilon$ -atomes, i.e. l'ensemble des points de  $\mathbb{Z}^d$  qui sont chargés par la mesure polymère d'un poids au moins égal à  $\varepsilon$ .

### *Pourquoi étudier ces quantités ?*

Nous allons rappeler brièvement les liens étroits qui existent entre principe de grandes déviations et énergie libre (cf. [Car08]).

On définit la mesure suivante, où  $\delta_x$  désigne la masse de Dirac au point  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\nu_n = \frac{1}{2^n} \sum_{\omega \in \Omega_n} \delta_{\frac{H_n(\omega)}{n}}.$$

On peut alors réécrire la fonction de partition du système de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 Z_n(\beta) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\omega \in \Omega_n} e^{\beta H_n(\omega)} \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{\omega \in \Omega_n} e^{n\beta \frac{H_n}{n}(\omega)} \\
 &= \int_{\Omega_n} e^{n\beta \frac{H_n}{n}(\omega)} \mathbf{P}(d\omega) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{n\beta x} \nu_n(dx).
 \end{aligned}$$

Rappelons que d'après la définition de l'énergie libre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(\beta) = p(\beta) + \lambda(\beta).$$

Comme  $\nu_n$  suit un principe de grandes déviations avec une bonne fonction de taux  $I$ , si la loi  $\mathbf{Q}$  vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique, on aura :

$$p(\beta) = I^*(\beta), \quad I(x) = p^*(x).$$

C'est en ce sens que nous pouvons dire que les informations importantes sur le comportement du système sont contenues dans la fonction de partition et l'énergie libre.

### Résumé

En guise de résumé, nous pouvons construire le tableau récapitulatif suivant :

0	$\beta_c$	$\longleftrightarrow ?$	$\tilde{\beta}_c$	$\beta$	
$W_\infty > 0 \text{ p.s.}$	$W_\infty = 0 \text{ p.s.}$	$W_\infty = 0 \text{ p.s.}$	$W_\infty = 0 \text{ p.s.}$		$d = 1, 2, \quad \beta_c = 0.$
$p(\beta) = 0$	$p(\beta) = 0$	$p(\beta) = 0$	$p(\beta) < 0$		$d = 1, \quad \tilde{\beta}_c = 0.$
					Arbre, $\beta_c = \tilde{\beta}_c.$

### I.1.3 Plan du chapitre

Pour étudier la transition de phase associée à la fonction de partition, la méthode des répliques consiste à calculer son carré puis à regarder les deux facteurs du produit comme deux réalisations indépendantes du système. Cette méthode s'appelle également la méthode du moment d'ordre 2. Elle permet d'obtenir une borne inférieure  $\beta_2$  pour la température inverse de transition de phase  $\beta_c$ . Savoir si l'égalité  $\beta_2 = \beta_c$  a lieu dépend du modèle considéré. Par exemple, dans le cas du modèle des verres de spin de Sherrington-Kirkpatrick l'égalité a lieu lorsqu'il n'y a pas de champ extérieur alors qu'il n'y a pas égalité dans le Random Energy Model (correspondant à un modèle de Sherrington-Kirkpatrick où l'on a moyenné le champ), cf. [Tal03]. Pour les polymères

dirigés en environnement aléatoire, nous savons qu'en général ces températures sont différentes pour les modèles sur un arbre (cf. [BPP93], [DES93]). Dans cette partie, nous montrons comment, en utilisant une méthode de calcul des moments introduite par B. Derrida et M.R. Evans (cf. [DE92]), nous pouvons trouver une condition qui permet de montrer que la température inverse critique  $\beta_c$  est *strictement inférieure* à  $\beta_2$ .

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à un modèle continu de polymère dirigé en environnement aléatoire gaussien. Ce modèle a notamment été utilisé par Ph. Carmona et Y. Hu [CH06] pour montrer la localisation des polymères par une méthode élégante utilisant principalement la formule d'Itô. L'étude de la fonction de partition de ce modèle permet d'établir un lien entre l'étude de l'énergie libre d'un polymère dirigé et les exposants de Lyapunov de l'équation d'Anderson parabolique. Des résultats sur l'indépendance de la fonction de Lyapunov par rapport à la condition initiale ont été obtenus par R. Carmona, L. Korolov et S. Molchanov [CKM01] puis généralisés par M. Cranston, T. Mountford et T. Shiga [CMS02] en utilisant des arguments de percolation. Nous présentons une démonstration de ces résultats succincte utilisant les propriétés des polymères dirigés. Nous déduisons de ces propriétés le comportement asymptotique de l'énergie libre lorsque la température inverse  $\beta \rightarrow 0$ . Cette dernière propriété sera obtenue par un simple argument de changement d'échelle.

## I.2 Une meilleure borne sur la température critique

Soient  $\omega^1, \omega^2$  deux marches aléatoires indépendantes issues de 0. Pour  $(t, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ , nous noterons  $p(t, x)$  la probabilité que ces marches aléatoires se rencontrent pour la première fois à l'instant  $t$ , au point  $x$ , i.e.

$$p(t, x) = \mathbf{P}^{\otimes 2} (\omega_j^1 \neq \omega_j^2, 1 \leq j < t, \omega_t^1 = \omega_t^2 = x). \quad (\text{I.1})$$

Définissons alors pour  $\alpha \in (1, 2]$ ,

$$\rho(\alpha) = \sum_{t, x} p(t, x)^{\alpha/2}. \quad (\text{I.2})$$

En utilisant une méthode de moment d'ordre 2, E. Bolthausen (cf. [Bol89]) a trouvé une borne inférieure  $\beta_2$  pour la température inverse critique  $\beta_c$ . En utilisant le théorème précédent, nous formulons une condition suffisante qui assure que  $\beta_2$  n'est pas la température inverse critique. Nous introduisons pour cela les deux entropies suivantes :

$$h_\nu(\alpha) = - \sum_{t, x} \frac{p(t, x)^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)} \ln \frac{p(t, x)^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)}, \quad (\text{I.3})$$

$$h_{\mathbf{Q}}(\alpha) = \mathbf{Q} \left[ \frac{e^{\alpha\beta_\alpha g}}{\mathbf{Q}[e^{\alpha\beta_\alpha g}]} \ln \frac{e^{\alpha\beta_\alpha g}}{\mathbf{Q}[e^{\alpha\beta_\alpha g}]} \right], \quad (\text{I.4})$$

où  $\beta_\alpha$  sera défini en (I.10).

Nous allons montrer le théorème suivant (la démonstration se trouve dans la partie I.2.3).

**Théorème I.1.** *En dimension  $d$  plus grande que 3, si*

$$h_\nu(2) < h_{\mathbf{Q}}(2),$$

*alors  $\beta_2 < \beta_c$ .*

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons le résultat d'uniforme intégrabilité suivant dont nous rappellerons la démonstration dans la partie I.2.1.

**Théorème I.2** ([DE92]). *On suppose que la dimension  $d$  est plus grande que 3. Soit  $\beta \in \mathbb{R}_+$ . S'il existe  $\alpha \in (1, 2]$  tel que*

$$\lambda(\alpha\beta) - \alpha\lambda(\beta) < -\ln \rho(\alpha),$$

*alors  $(W_n(\beta))_n$  est uniformément intégrable et  $\beta \leq \beta_c$ .*

*Remarques.*

- La quantité  $h_\nu(2)$  ne dépend que du graphe dans lequel évolue le polymère. Les résultats présentés ci-dessous sont donc valables pour des formes de réseaux plus générales que  $\mathbb{Z}^d$ , dès que les marches aléatoires sur ce réseau sont transientes. Nous évoquerons par exemple le cas des graphes réguliers qui est traité dans [BPP93].
- Ce théorème présente une méthode rapide et peu coûteuse en calcul pour vérifier que la méthode du moment d'ordre 2 n'est pas optimale. En effet, le calcul de la quantité  $h_\nu(2)$  est à effectuer une fois pour toutes, quel que soit l'environnement dans lequel évolue le polymère et le calcul de  $h_{\mathbf{Q}}(2)$  repose sur celui de  $\beta_2$  qui est obtenu par résolution d'une équation.
- Lorsque l'environnement est gaussien, nous verrons (cf. partie I.2.4) que l'inégalité entropique est une condition nécessaire et suffisante. Plus précisément, la méthode des moments fractionnaires introduite par B. Derrida et M.R. Evans fournit une meilleure borne que celle du moment d'ordre 2 si et seulement si  $h_\nu(2) < h_{\mathbf{Q}}(2)$ .
- Nous tenons à évoquer brièvement la borne inférieure obtenue par M. Birkner (cf. [Bir04] ainsi que les références contenues dans cet article). L'idée est la suivante. Étant donnée la fonction de partition  $W_n$ , nous étudions la variable aléatoire

$$\widetilde{W}_n = \mathbf{P}^1 \left[ e^{\beta(H_n(\omega^1) + H_n(\omega^2))} \right] e^{-n\lambda(\beta)},$$

où  $\omega^1, \omega^2$  désignent deux marches aléatoires indépendantes,  $\mathbf{P}^1$  la mesure uniforme sur les chemins de marches aléatoires  $\omega^1$ . La quantité  $\widetilde{W}_n$  est ainsi une variable aléatoire dépendant de l'environnement  $g$  mais également de la marche aléatoire  $\omega^2$ . M. Birkner montre que l'uniforme intégrabilité de  $(W_n)$  est équivalente à la tension de la loi de  $(\widetilde{W}_n)$ . Ainsi, il considère la température inverse critique  $\beta_\star = \sup \left\{ \beta; \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Q} \left[ \widetilde{W}_n \right] < +\infty \right\}$ . On introduit alors une quantité  $\alpha_\star$

telle que  $\lambda(2\beta_\star) - 2\lambda(\beta_\star) = -\ln \alpha_\star$ . Cependant, le théorème permettant de montrer que  $\alpha_\star = 1 + \left( \sum_{n \geq 1} e^{-\sum_x p_n(x) \ln p_n(x)} \right)^{-1}$  repose sur un théorème de Sanov conditionnel dont la preuve est incomplète. Si cette valeur pour  $\alpha_\star$  est avérée, l'inégalité de Jensen permet de montrer que  $\beta_2 < \beta_\star \leq \beta_c$ .

### I.2.1 La méthode des moments fractionnaires

Pour faciliter la compréhension des parties suivantes, nous commençons par présenter une démonstration du théorème I.2 des moments fractionnaires. Pour montrer l'uniforme intégrabilité, B. Derrida et M.R. Evan ont utilisé la condition nécessaire suivante (par exemple [Wil91] 13.3 (a)) : S'il existe  $\alpha > 1$  tel que

$$\sup_n \mathbf{Q}(W_n^\alpha) < +\infty,$$

alors  $(W_n)_n$  est uniformément intégrable.

Nous restreindrons notre étude à des  $\alpha \in (1, 2]$  ; cela nous permettra de nous ramener à la méthode du moment d'ordre 2 pour laquelle nous savons faire des calculs explicites via les répliques.

Dans la suite, lorsque deux marches aléatoires indépendantes  $\omega^1, \omega^2$  se rencontrent aux instants  $t_1 < \dots < t_m$  et sont alors en  $x_1, \dots, x_m$  (cf. figure I.3), i.e.

$$\{\omega_0^1 = \omega_0^2 = 0, \omega_{t_i}^1 = \omega_{t_i}^2 = x_i, i = 1, \dots, m, \omega_j^1 \neq \omega_j^2, j \notin \{t_1, \dots, t_m\}\},$$

nous écrirons  $r = ((t_1, x_1), \dots, (t_m, x_m)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d)^m$  et

$$\omega^1 \stackrel{r}{=} \omega^2. \tag{I.5}$$

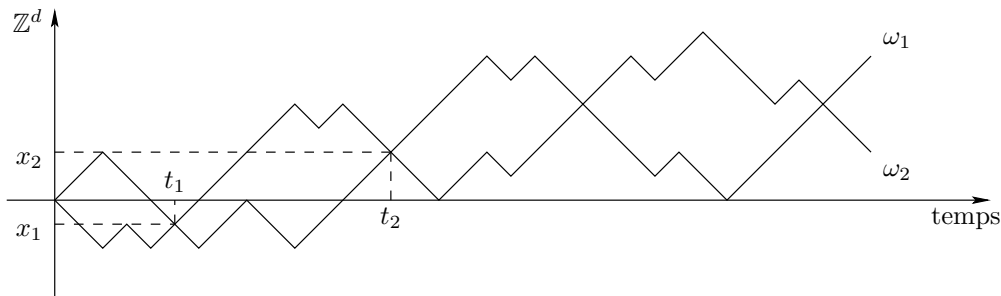


FIG. I.3 – Schéma de deux marches aléatoires se rencontrant en  $(t_i, x_i)$

*Démonstration du théorème I.2.* Nous commençons par évaluer le moment d'ordre 2 de la fonction de partition  $Z_n$ . Pour cela, nous introduisons deux marches aléatoires

indépendantes puis séparons les espérances en fonction de leurs instants de rencontre :

$$\begin{aligned}
 Z_n^2 &= \mathbf{P} \left[ e^{\beta(H_n(\omega^1) + H_n(\omega^2))} \right] \\
 &= \sum_{m=0}^n \sum_{1 \leq t_1 < \dots < t_m \leq n} \sum_{(x_1, \dots, x_m)} \mathbf{P} \left[ e^{\beta(H_n(\omega^1) + H_n(\omega^2))} \mathbb{1}_{\omega^1 \stackrel{r}{=} \omega^2} \right] \\
 &=: \sum_{m=0}^n \sum_r Y(r).
 \end{aligned}$$

*Remarque.* On retrouve ici une version plus élaborée du calcul du moment d'ordre 2 effectué par E. Bolthausen dans [Bol89].

Nous calculons ensuite les moments d'ordre  $\alpha$  de la fonction de partition  $Z_n$  lorsque  $\alpha \in (1, 2]$ , en utilisant l'inégalité classique

$$\left( \sum x_i \right)^\gamma \leq \sum x_i^\gamma, \quad \gamma \in [0, 1], \quad x_i \geq 0. \quad (\text{I.6})$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}[Z_n^\alpha] &= \mathbf{Q} \left[ (Z_n^2)^{\alpha/2} \right] \\
 &= \mathbf{Q} \left[ \left\{ \sum_{m=0}^n \sum_r Y(r) \right\}^{\alpha/2} \right] \\
 &\leq \sum_{m=0}^n \sum_r \mathbf{Q} \left[ Y(r)^{\alpha/2} \right].
 \end{aligned}$$

Regardons plus en détail la quantité  $Y(r)$ . Nous définissons les hamiltoniens partiels :

$$H_{j_1}^{j_2}(\omega) = \sum_{i=j_1+1}^{j_2} g(i, \omega_i).$$

Notons  $\omega_{i,j} = (\omega_k)_{k \in \{t_i, \dots, t_j\}}$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_{m+1} = n$  et  $\omega_{m,m+1}^1 \neq \omega_{m,m+1}^2$  dès que  $\omega_i^1 \neq \omega_i^2$  pour tout  $i \in \{t_m, \dots, t_{m+1}\}$ . Nous pouvons ainsi décomposer, en utilisant la propriété de Markov,

$$\begin{aligned}
 Y(r) &= \mathbf{P} \left[ \prod_{i=1}^m e^{\beta(H_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega^1) + H_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega^2))} \mathbb{1}_{\{\omega_{i-1,i}^1 \stackrel{(t_i, x_i)}{=} \omega_{i-1,i}^2\}} \right. \\
 &\quad \left. \times e^{\beta(H_{t_m}^n(\omega^1) + H_{t_m}^n(\omega^2))} \mathbb{1}_{\{\omega_{m,m+1}^1 \neq \omega_{m,m+1}^2\}} \right] \\
 &= \prod_{i=1}^m Y_{i-1,i} \times \tilde{Y}_{m,n},
 \end{aligned}$$

où nous avons noté

$$\begin{aligned} Y_{i-1,i} &= \mathbf{P} \left[ e^{\beta(H_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega^1) + H_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega^2))} \mathbb{1}_{\{\omega_{i-1,i}^1 \stackrel{(t_i, x_i)}{=} \omega_{i-1,i}^2\}} \right], \\ \tilde{Y}_{m,n} &= \mathbf{P} \left[ e^{\beta(H_{t_m}^n(\omega^1) + H_{t_m}^n(\omega^2))} \mathbb{1}_{\{\omega_{m,m+1}^1 \neq \omega_{m,m+1}^2\}} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'indépendance des environnements par rapport à la dimension temporelle,

$$\mathbf{Q}[Z_n^\alpha] \leq \sum_{m=0}^n \sum_r \prod_{i=1}^m \mathbf{Q}[Y_{i-1,i}^{\alpha/2}] \mathbf{Q}[\tilde{Y}_{m,n}^{\alpha/2}].$$

Dans l'expression précédente, les marches aléatoires ne se rencontrent plus après l'instant  $t_m$ . Ainsi, en utilisant l'inégalité de Jensen,

$$\mathbf{Q}[\tilde{Y}_{m,n}^{\alpha/2}] \leq \mathbf{P}(\omega_j^1 \neq \omega_j^2, t_m < j \leq n)^{\alpha/2} e^{\alpha(n-t_m)\lambda(\beta)}.$$

Nous obtenons ainsi la borne supérieure

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}[W_n^\alpha] &\leq \sum_{m=0}^n \sum_r \mathbf{P}(\omega_j^1 \neq \omega_j^2, t_m < j \leq n)^{\alpha/2} \prod_{i=1}^m \mathbf{Q}[Y_{i-1,i}^{\alpha/2}] e^{-t_m \alpha \lambda(\beta)} \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_r \left\{ \mathbf{P}(\omega_j^1 \neq \omega_j^2, t_m < j \leq n)^{\alpha/2} \prod_{i=1}^m \mathbf{Q} \left[ e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})\lambda(\beta)} Y_{i-1,i}^{\alpha/2} \right] \right\} \end{aligned}$$

En majorant la probabilité par 1 et comme les environnements sont indépendants et identiquement distribués,

$$\mathbf{Q}[W_n^\alpha] \leq \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{t_1 \in \mathbb{N}, x_1 \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{Q} \left[ e^{-\alpha t_1 \lambda(\beta)} Y_{0,1}^{\alpha/2} \right] \right\}^m.$$

Or, nous verrons à la fin de ce calcul que cette suite est sommable dès que  $\lambda(\alpha\beta) - \alpha\lambda(\beta) < -\ln \rho(\alpha)$ . Ainsi, en utilisant le théorème de convergence dominée, on pourra passer à la limite  $n \rightarrow \infty$  dans l'expression précédente.

D'une part, en dimension  $d$  plus grande que 3, les marches aléatoires sont transientes et il existe une quantité  $q_d \in (0, 1)$  telle que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\omega_j^1 \neq \omega_j^2, t_m < j \leq n) &= \mathbf{P}(\omega_{t_m}^1 = \omega_{t_m}^2 = x_m, \omega_j^1 \neq \omega_j^2, j > t_m). \\ &=: q_d \end{aligned}$$

D'autre part, nous pouvons utiliser l'indépendance des environnements, en notant



$(t, x) = (t_1, x_1)$  et en utilisant l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} \left[ \frac{Y_{0,1}^{\alpha/2}}{e^{\alpha t \lambda(\beta)}} \right] &= e^{-\alpha t \lambda(\beta)} \mathbf{Q} \left[ \mathbf{P} \left[ e^{\beta \sum_{i=1}^{t-1} g(i, x_i^1) + g(i, x_i^2)} e^{2\beta g(t, x)} \mathbb{1}_{\omega^1(t, x) \omega^2} \right]^{\alpha/2} \right] \\
 &= e^{-\alpha t \lambda(\beta)} e^{\lambda(\alpha\beta)} \mathbf{Q} \left[ \mathbf{P} \left[ e^{\beta \sum_{i=1}^{t-1} g(i, x_i^1) + g(i, x_i^2)} \mathbb{1}_{\omega^1(t, x) \omega^2} \right]^{\alpha/2} \right] \\
 &\leq e^{\lambda(\alpha\beta) - \alpha t \lambda(\beta)} \mathbf{Q} \mathbf{P} \left[ e^{\beta \sum_{i=1}^{t-1} g(i, x_i^1) + g(i, x_i^2)} \mathbb{1}_{\omega^1(t, x) \omega^2} \right]^{\alpha/2} \\
 &= e^{\lambda(\alpha\beta) - \alpha t \lambda(\beta)} e^{2\frac{\alpha}{2} \lambda(\beta)(t-1)} \mathbf{P}(\omega^1(t, x) \omega^2)^{\alpha/2} \\
 &= e^{\lambda(\alpha\beta) - \alpha \lambda(\beta)} p(t, x)^{\alpha/2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons obtenu la borne supérieure (rappelons que  $\rho$  est défini en (I.2)) :

$$\limsup_n \mathbf{Q} \left[ W_n^{\alpha/2} \right] \leq q_d^{\alpha/2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ e^{\lambda(\alpha\beta) - \alpha \lambda(\beta)} \rho(\alpha) \right\}^m.$$

Finalement, s'il existe  $\alpha \in (1, 2]$  tel que

$$\lambda(\alpha\beta) - \alpha \lambda(\beta) < -\ln \rho(\alpha),$$

la martingale  $(W_n(\beta))_n$  est uniformément intégrable, et le théorème est démontré.  $\square$

*Remarques.*

- On remarque que ce calcul reste valable dès que le polymère évolue sur un graphe pour lequel les marches aléatoires simples sont transientes.
- Lorsque  $\alpha = 2$ ,  $\rho(2) = 1 - q_d$ . La condition précédente est donc la même que celle obtenue par E. Bolthausen dans [Bol89] en utilisant la méthode du moment d'ordre 2,

$$\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) < -\ln(1 - q_d).$$

- Les valeurs numériques de  $q_d$  peuvent être trouvées dans l'article de P. Griffin [Gri90] avec une grande précision. Nous les utiliserons par la suite.

## I.2.2 Une étude de fonction

Nous allons commencer par étudier la fonction  $\rho$ .

*Les valeurs caractéristiques*

On définit la borne inférieure du domaine de définition de  $\rho$  :

$$\alpha_0 = \inf \{ \alpha \in (1, 2]; \rho(\alpha) < +\infty \}. \tag{I.7}$$

**Proposition I.2.1.** 1.  $\rho(2) = 1 - q_d < +\infty$ .

2. La fonction  $\alpha \mapsto \rho(\alpha)$  est décroissante sur  $(\alpha_0, 2]$ .

## I.2. Une meilleure borne sur la température critique

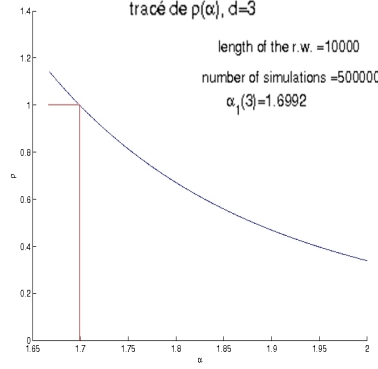


FIG. I.4 – Graphe de la fonction  $\rho$  en dimension  $d = 3$

3. Il existe  $\alpha_1 \in (\alpha_0, 2)$  tel que

$$\rho(\alpha_1) = 1.$$

*Démonstration.* 1. Pour  $\alpha = 2$ , on a (rappelons que  $d \geq 3$ )

$$\begin{aligned} \rho(2) &= \mathbf{P} \left( \exists t \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d; \omega_t^1 = \omega_t^2 = x \right) \\ &= 1 - \mathbf{P} \left( \forall t \in \mathbb{N}, \omega_t^1 \neq \omega_t^2 \right) \\ &= 1 - q_d \\ &< 1. \end{aligned}$$

2. Comme  $\rho$  est dérivable sur son domaine de définition,

$$\rho'(\alpha) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{t,x} p(t,x)^{\alpha/2} \ln p(t,x)}{\sum_{t,x} p(t,x)^{\alpha/2}}$$

est une quantité négative car  $p(t,x) < 1$ , pour tout  $(t,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ .

3. Lorsque  $d \geq 3$ , nous montrons dans la proposition I.2.2 suivante que

$$\lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} \rho(\alpha) = +\infty.$$

La monotonie de  $\rho$  ainsi que sa valeur pour  $\alpha = 2$  permettent de conclure grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

□

*Remarque.* Lorsque le polymère vit sur un arbre régulier, la quantité  $\rho$  est très facile à calculer. En effet, soit les marches aléatoires se rencontrent au premier pas, soit elles ne se rencontreront jamais. Ainsi,  $\ln \rho(\alpha) = (\alpha - 1) \ln(2d)$  et  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ .

**Proposition I.2.2.** *Pour  $d \geq 3$ , nous avons l'encadrement*

$$4/d < \alpha_0 \leq 1 + 2/d.$$

Dans la suite, dans un souci de lisibilité, nous noterons  $p_{t,x} = p(t, x)$ .

*Démonstration de la proposition I.2.2.* Comprendre comment se comportent les quantités  $p_{t,x}$  lorsque  $t$  est grand n'est pas aisé. En effet, la condition d'évitement est difficile à traiter et nous renvoie aux notions de marches aléatoires autoévitantes. Nous donnons ici le meilleur encadrement que nous avons pu établir sur  $\alpha_0$ .

- Pour établir la borne inférieure, nous utilisons l'inégalité (I.6). En effet, on rappelle que

$$\rho(\alpha) = \sum_{t \in \mathbb{N}} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p_{t,x}^{\alpha/2}.$$

Comme  $\alpha \in (1, 2]$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho(\alpha) &\geq \sum_{t \in \mathbb{N}} \left( \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p_{t,x} \right)^{\alpha/2} \\ &= \sum_{t \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\omega_t^1 = \omega_t^2, \omega_j^1 \neq \omega_j^2, j < t)^{\alpha/2} \\ &= \sum_{t \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\omega_{2t} = 0, \omega_j \neq 0, j < 2t)^{\alpha/2}, \end{aligned}$$

où  $\omega$  désigne une marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^d$  issue de  $x$ . Enfin, comme  $d \geq 3$  (cf. [Gri90] Appendix 7),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\omega_{2t} = 0, \omega_j \neq 0, j < 2t) &\asymp \mathbf{P}(\omega_{2t} = 0) \\ &\asymp t^{-d/2}. \end{aligned}$$

Ainsi, dès que  $\alpha \leq \frac{4}{d}$ , nous avons  $\rho(\alpha) = +\infty$  et ainsi

$$\alpha_0 \geq \frac{4}{d}.$$

- Pour établir la borne supérieure, nous supprimons la condition d'autoévitement. En effet, soit

$$r_{t,x} = \mathbf{P}(\omega_t^1 = x).$$

Nous avons alors

$$p_{t,x} \leq r_{t,x}^2.$$

Rappelons que d'après le théorème central limite (cf. [Law91] Lemma 1.2.1),

$$|\mathbf{P}(\omega_t = x) - \bar{r}_{t,x}| = O_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t^{1+d/2}} \right),$$

$$\text{où } \bar{r}_{t,x} := 2 \left( \frac{d}{2\pi t} \right)^{d/2} e^{-\frac{d\|x\|^2}{2t}}.$$

## I.2. Une meilleure borne sur la température critique

---

Ainsi, uniformément en  $x$ ,  $r_{t,x} \asymp \bar{r}_{t,x}$ . De plus, nous remarquons que  $\bar{r}_{t,x}$  ne dépend que de la norme de  $x$  et notons

$$N(\sqrt{R}) = \left| \left\{ x \in \mathbb{Z}^d, \|x\|^2 = R \right\} \right|, \quad \bar{\rho}(\alpha) = \sum_{t,x} \bar{r}_{t,x}^\alpha.$$

$\bar{\rho}$  converge si et seulement si

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha d/2}} \sum_{R=0}^{t^2} N(R) e^{-\frac{\alpha d R}{2t}} \text{ converge.}$$

Comme  $\alpha \in [1, 2)$  et  $d \geq 3$ ,  $\sum_{t=1}^{\infty} t^{\alpha d/2}$  est convergente, et on peut donc supprimer le terme en  $R = 0$  dans le calcul précédent. Après une inversion de sommes, nous devons donc étudier le comportement de la série

$$\sum_{R=1}^{\infty} N(R) \sum_{t=\lfloor \sqrt{R} \rfloor}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha d/2}} e^{-\frac{\alpha d R}{2t}}.$$

L'étude des variations de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha d/2}} e^{-\frac{\alpha d R}{2t}}$  permet de majorer cette dernière expression par

$$\sum_{R=0}^{\infty} N(R) \left\{ \int_{\lfloor \sqrt{R} \rfloor}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha d/2}} e^{-\frac{\alpha d R}{2t}} dt + \frac{1}{R^{\alpha d/2}} e^{-\frac{\alpha d}{2}} \right\}.$$

Enfin, un changement de variable dans la partie intégrale permet d'obtenir la majoration

$$\sum_{R=0}^{\infty} N(R) R^{-\frac{\alpha d}{2}+1} \int_{1/\lfloor \sqrt{R} \rfloor}^{\infty} \frac{1}{u^{\alpha d/2}} e^{-\frac{\alpha d}{2u}} du + c_{\alpha,d} \sum_{R=0}^{\infty} N(R) R^{-\alpha d/2}.$$

Or, lorsque  $R$  tend vers l'infini, on a la majoration,  $N(\sqrt{R}) \leq C_d R^{d/2-1}$  (voir par exemple [IK04], Theorem 20.9 et Theorem 20.15). Cette série converge donc dès que

$$\frac{d}{2} - 1 + 1 - \frac{\alpha d}{2} \leq -1.$$

Ainsi,  $\bar{\rho}(\alpha) < +\infty$  dès que  $\alpha \geq 1 + \frac{2}{d}$ . Finalement, comme  $\rho \leq \bar{\rho}$ , on obtient comme annoncé

$$\alpha_0 \leq 1 + \frac{2}{d}.$$

□

### I.2.3 La condition entropique : démonstration du Théorème I.1

Rappelons la condition d'uniforme intégrabilité obtenue précédemment dans le théorème I.2,

$$\text{il existe } \alpha \in (1, 2] \text{ tel que } \frac{\lambda(\alpha\beta)}{\alpha\beta} - \frac{\lambda(\beta)}{\beta} < \frac{-\ln \rho(\alpha)}{\alpha\beta}. \quad (\text{I.8})$$

Rappelons également les notations des entropies (I.3), (I.4) :

$$\begin{aligned} h_\nu(\alpha) &= - \sum_{t,x} \frac{p(t,x)^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)} \ln \frac{p(t,x)^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)}, \\ h_{\mathbf{Q}}(\alpha) &= \mathbf{Q} \left[ \frac{e^{\alpha\beta_\alpha g}}{\mathbf{Q}[e^{\alpha\beta_\alpha g}]} \ln \frac{e^{\alpha\beta_\alpha g}}{\mathbf{Q}[e^{\alpha\beta_\alpha g}]} \right]. \end{aligned}$$

*Remarques.*

- Nous utiliserons l'expression suivante pour ces entropies :

$$h_\nu(\alpha) = \ln \rho(\alpha) - 2 \frac{\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)}, \quad h_{\mathbf{Q}}(\alpha) = \alpha\beta_\alpha \lambda'(\alpha\beta_\alpha) - \lambda(\alpha\beta_\alpha).$$

- Comme  $p(t,x)^{\alpha/2}/\rho(\alpha) \leq 1$  et  $x \mapsto x \ln x$  est concave, les quantités  $h_\nu(\alpha)$  et  $h_{\mathbf{Q}}(\alpha)$  sont positives.

*Le domaine de définition de la borne inférieure*

Pour tout  $\alpha \in [\alpha_1, 2]$  la température inverse critique  $\beta_\alpha$  (qui peut être infinie) est définie par

$$\beta_\alpha = \sup \{ \beta \in \mathbb{R}_+, \lambda(\alpha\beta) - \alpha\lambda(\beta) < -\ln \rho(\alpha) \}. \quad (\text{I.9})$$

*Remarque.* Quand  $\beta_c < +\infty$  (par exemple dans le cas d'un environnement gaussien cf. [CSY04], Exemple 2.2.2),  $\beta_\alpha < +\infty$  et satisfait

$$\lambda(\alpha\beta_\alpha) - \alpha\lambda(\beta_\alpha) = -\ln \rho(\alpha). \quad (\text{I.10})$$

Nous supposons dans la suite que  $\beta_c < +\infty$  et nous utiliserons la définition précédente pour définir  $\beta_\alpha$ . Nous pouvons vérifier cette dernière hypothèse en utilisant la borne supérieure

$$\beta_c \leq \inf \{ \beta \in \mathbb{R}_+, \ln(2d) < \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) \}.$$

Remarquons tout d'abord qu'une simple application de l'inégalité de Jensen assure que  $\lambda$  est strictement convexe et  $\lambda(0) = 0$ , donc

$$\beta \mapsto \frac{\lambda(\beta)}{\beta} \text{ est croissante.}$$

Ainsi, une condition nécessaire pour obtenir le critère (I.8) d'uniforme intégrabilité est d'avoir  $\ln \rho(\alpha) > 0$ , soit

$$\rho(\alpha) < 1.$$

**Proposition I.2.3.** *La fonction  $\alpha \mapsto \beta_\alpha$  est définie sur  $[\alpha_1, 2]$ . De plus, lorsque  $\alpha = \alpha_1$ ,*

$$\beta_{\alpha_1} = 0.$$

*Démonstration.* En utilisant la définition,

$$\frac{\lambda(\alpha_1 \beta_{\alpha_1})}{\alpha_1 \beta_{\alpha_1}} - \frac{\lambda(\beta_{\alpha_1})}{\beta_{\alpha_1}} = 0.$$

Comme  $\beta \mapsto \frac{\lambda(\beta)}{\beta}$  est croissante et  $\alpha_1 > 1$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_{\alpha_1} &= \beta_{\alpha_1} \\ \beta_{\alpha_1} &= 0. \end{aligned}$$

□

*La démonstration du théorème I.1*

Dans cette partie, nous étudions le comportement de  $\alpha \mapsto \beta_\alpha$  quand cette quantité est finie sur  $(\alpha_1, 2]$ .

En notant

$$\psi(\alpha, \beta) = \lambda(\alpha\beta) - \alpha\lambda(\beta) + \ln \rho(\alpha),$$

la règle de la chaîne combinée à la définition (I.10) de  $\beta_\alpha$  donne

$$\frac{\partial \beta_\alpha}{\partial \alpha} = -\frac{\partial_\alpha \psi}{\partial_\beta \psi}(\alpha, \beta_\alpha).$$

Comme  $\lambda$  est strictement convexe,  $\lambda'$  est croissante et pour tout  $\alpha \geq \alpha_1 > 1$ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \beta} = \alpha(\lambda'(\alpha\beta) - \lambda'(\beta)) > 0.$$

Ainsi, les variations de  $\alpha \mapsto \beta_\alpha$  dépendent uniquement du signe de

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(\alpha, \beta_\alpha) = \beta_\alpha \lambda'(\alpha \beta_\alpha) - \lambda(\beta_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{t,x} \frac{\ln p(t,x) p(t,x)^{\alpha/2}}{\sum_{t,x} p(t,x)^{\alpha/2}}.$$

La fonction  $\alpha \mapsto \beta_\alpha$  atteint son maximum sur  $(\alpha_1, 2)$  dès que

$$\left. \frac{\partial \beta_\alpha}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=2} < 0,$$

i.e.

$$\beta_2 \lambda'(2\beta_2) - \lambda(\beta_2) + \frac{\rho'(2)}{\rho(2)} > 0.$$

Ainsi, en utilisant la définition (I.10) de  $\beta_2$ ,

$$\underbrace{2\beta_2\lambda'(2\beta_2) - \lambda(2\beta_2)}_{h_{\mathbf{Q}}(2)} - \underbrace{\ln \rho(2) + 2\frac{\rho'(2)}{\rho(2)}}_{-h_{\nu}(2)} > 0,$$

compte tenu des définitions des entropies (I.3) et (I.4). Nous obtenons ainsi la condition suffisante

$$h_{\nu}(2) < h_{\mathbf{Q}}(2).$$

Ceci conclut la démonstration du théorème I.1.

*Remarques.*

- Lorsque l'environnement est gaussien, nous montrons dans la partie I.2.4 que cette condition suffisante est en fait nécessaire en prouvant que la fonction  $\alpha \mapsto \beta_{\alpha}$  est concave. Nous pensons que ce résultat est toujours vrai pour des environnements beaucoup plus généraux, mais nous n'avons pu mener à bien les calculs.
- Lorsqu'il existe, nous pouvons définir le couple optimal noté  $(\alpha_c, \beta_{\alpha_c})$ . Il satisfait la relation  $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(\alpha_c, \beta_{\alpha_c}) = 0$ , que nous pouvons réécrire :

$$\beta_{\alpha_c}\lambda'(\alpha_c\beta_{\alpha_c}) - \lambda(\beta_{\alpha_c}) = -\frac{1}{2} \sum_{t,x} \ln p(t,x) \frac{p(t,x)^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)}.$$

Finalement, en utilisant la définition (I.10) de  $\beta_{\alpha}$ , nous obtenons

$$\alpha_c\beta_{\alpha_c}\lambda'(\alpha_c\beta_{\alpha_c}) - \lambda(\alpha_c\beta_{\alpha_c}) = h_{\nu}(\alpha_c).$$

- Lorsque le polymère vit sur un arbre régulier avec  $2d$  branches, la fonction  $\rho$  atteint son maximum en  $\alpha_c = \alpha_1 = 1$ , et la température inverse critique  $\beta_c^t$  satisfait la relation suivante :

$$\beta_c^t\lambda'(\beta_c^t) - \lambda(\beta_c^t) = \ln(2d).$$

### *L'entropie et la dimension*

Nous terminons cette partie avec un lemme concernant le comportement de  $h_{\mathbf{Q}}(2)$  par rapport à la dimension  $d$ .

**Lemme I.2.4.** *On considère un polymère défini sur le graphe  $\mathbb{Z}^d$ . La fonction  $d \mapsto h_{\mathbf{Q}}(2)$  est croissante.*

*Démonstration.* Pour commencer, remarquons (cf. [OS96] Lemma 1) que la fonction  $d \mapsto 1 - q_d$  est décroissante. Ainsi,  $d \mapsto -\ln(1 - q_d)$  est croissante.

Par ailleurs, comme la fonction  $\lambda$  est strictement convexe,  $\beta \mapsto \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)$  est croissante. Ainsi,  $d \mapsto \beta_2$  est croissante.

Finalement, nous pouvons vérifier que  $\beta \mapsto 2\beta\lambda'(2\beta) - \lambda(2\beta)$  est croissante, ce qui permet de conclure que  $d \mapsto h_{\mathbf{Q}}(2)$  est croissante.  $\square$

Nous pensons que la fonction  $d \mapsto h_{\nu}(2)$  est décroissante, ce qui permettrait de montrer l'existence d'une dimension critique au-delà de laquelle la température inverse  $\beta_2$  n'est pas la température inverse critique.

### I.2.4 L'environnement gaussien et la condition suffisante

**Proposition I.2.5.** *Lorsque l'environnement est gaussien, la fonction  $\alpha \mapsto \beta_\alpha$  est concave. Ainsi, la méthode des moments fractionnaires permet de montrer que  $\beta_2 < \beta_c$  si et seulement si  $h_\nu(2) < h_Q(2)$ .*

Lorsque l'environnement suit une loi normale centrée réduite, nous pouvons inverser aisément la condition (I.10) d'uniforme intégrabilité. En effet, le cumulante vaut

$$\lambda(\beta) = \frac{\beta^2}{2}.$$

La condition d'uniforme intégrabilité permet ainsi de définir la quantité

$$\frac{\beta_\alpha^2}{2} = -\frac{\ln \rho(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}.$$

*Démonstration.* Les variations de  $\alpha \mapsto \beta_\alpha$  sont les mêmes que celles de  $\beta_\alpha^2/2$  et nous remarquons que

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left( \frac{\beta_\alpha^2}{2} \right) &= -\frac{\sum_{t,x} \ln p^{1/2}(t,x) \frac{p^{\alpha/2}(t,x)}{\rho(\alpha)}}{\alpha(\alpha-1)} + \frac{2\alpha-1}{\alpha^2(\alpha-1)^2} \ln \rho(\alpha) \\ &= \frac{1}{\alpha^2(\alpha-1)^2} \left\{ (2\alpha-1) \ln \rho(\alpha) - \alpha(\alpha-1) \sum_{t,x} \ln p^{1/2} \frac{p^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)} \right\} \\ &=: \frac{\Psi(\alpha)}{\alpha^2(\alpha-1)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit d'étudier le signe de  $\Psi$ . Pour cela, nous étudions ses variations :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \Psi(\alpha) &= 2 \ln \rho(\alpha) + (2\alpha-1) \sum_{t,x} \ln p^{1/2} \frac{p^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)} - \dots \\ &\quad \dots - (2\alpha-1) \sum_{t,x} \ln p^{1/2} \frac{p^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)} - \dots \\ &\quad \dots - \alpha(\alpha-1) \sum_{t,x} (\ln p^{1/2})^2 \frac{p^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)} + \dots \\ &\quad \dots + \alpha(\alpha-1) \left( \sum_{t,x} \ln p^{1/2} \frac{p^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)} \right)^2 \\ &= 2 \ln \rho(\alpha) - \alpha(\alpha-1) \text{Var}_{\nu_\alpha} \left( \ln p^{1/2} \right) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

où nous avons noté  $\nu_\alpha$  la mesure sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$  définie par  $\nu_\alpha(t,x) = \frac{p(t,x)^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)}$ . □



### I.2.5 Des exemples d'environnements

Pour illustrer les résultats théoriques précédents, nous présentons quelques environnements particuliers. Ces simulations numériques montrent que le comportement de  $\alpha \mapsto \beta_\alpha$  est relié à la loi de l'environnement. Quand la dimension  $d$  est plus grande que 3, il existe un environnement pour lequel  $\beta_c > \beta_2$ .

Nous renvoyons à la partie I.2.6 pour la description des simulations et la construction effective du tableau récapitulatif suivant. On rappelle que  $\beta_c \neq \beta_2$  dès que  $h_\nu(2) < h_{\mathbf{Q}}(2)$ .

$d$	$h_\nu(2)$	$h_{\mathbf{Q}}(2)$		
		<i>binomial</i>	<i>poisson</i>	<i>gaussien</i>
3	5.18	4.96	6.42	2.16
4	4.08	7.59	10.30	3.29
5	3.52	9.17	12.73	4

#### *L'environnement binomial*

Nous considérons dans cette partie un environnement binomial  $\mathcal{B}(n, p)$ . Ainsi, nous supposons  $g \sim \mathcal{B}(n, p)$ , i.e.

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=0}^n C_n^j p^j (1-p)^{n-j} \delta_j,$$

où  $\delta$  désigne la masse de Dirac. Le cumulante de l'environnement binomial décrit ci-dessous n'est pas défini en tout point de la droite réelle. Cependant, nous pouvons effectuer tous les raisonnements précédents sur son intervalle de définition.

Nous avons ainsi :

$$\lambda(\beta) = n \ln \left( 1 - p + p e^\beta \right).$$

*Remarques.*

- Même si l'environnement est borné, le comportement du polymère est différent du comportement d'un polymère plongé dans un environnement de Bernoulli  $\{\pm 1\}$  pour lequel  $\beta_2 = +\infty$ .
- Nous pouvons également remarquer que le comportement du polymère est lié au paramètre  $p$ . En effet, lorsque  $p = 1/2$  et  $d = 5$ ,  $\beta_2 = +\infty$ .

#### *Un environnement poissonien*

Soit  $|g| \sim \mathcal{P}(k)$ , i.e.  $\mathbf{Q} = e^{-k} \delta_0 + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} e^{-k} \frac{k^{|j|}}{|j|!} \delta_j$ . Nous obtenons,

$$\lambda(\beta) = \ln \frac{e^{-k}}{2} + \ln \left\{ e^{ke^\beta} + e^{ke^{-\beta}} \right\}.$$

Nous choisissons  $k = 0.01$  (cf. figure I.2.5).

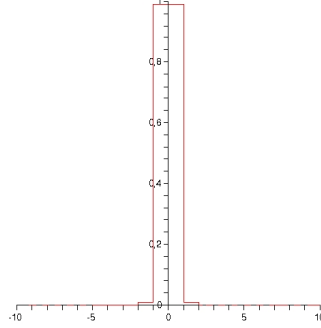


FIG. I.5 – La loi de Poisson de paramètre 0.01

Les simulations numériques montrent que le critère (I.10) d’uniforme intégrabilité est meilleur que la méthode du moment d’ordre 2 quelle que soit la dimension.

#### *L’environnement gaussien*

Lorsque l’environnement est gaussien  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , toutes les équations précédentes peuvent être inversées aisément. En effet,

$$\lambda(\beta) = \frac{\beta^2 \sigma^2}{2}, \quad \beta_2^2 = \frac{-\ln \rho(1 - q_d)}{\sigma^2}.$$

Ainsi, on obtient la valeur

$$h_{\mathbf{Q}}(2) = -2 \ln(1 - q_d).$$

*Remarque.* Pour les environnements précédents, changer le paramètre de la loi influençait le comportement de  $\beta_{\alpha_c}$ . En particulier, plus l’environnement est concentré autour de 0, plus  $h_{\mathbf{Q}}(2)$  est grand. Au contraire, pour les environnements gaussiens, l’entropie ne dépend pas de la variance.

### I.2.6 Programmes

Les simulations numériques nous permettent d’obtenir une valeur de  $h_\nu(2)$ . Pour obtenir ces valeurs, nous simulons  $N$  marches aléatoires en dimension  $d$ , de longueur  $n$  et regardons leur premier point d’intersection. Nous notons  $\tilde{q}_d$  l’approximation numérique de  $q_d$  ainsi obtenue.

$d$	$q_d$	$\tilde{q}_d - q_d$	$h_\nu(2)$	$n$	$N$
3	0.34	$-2.8 \cdot 10^{-4}$	5.18	50 000	1 000 000
4	0.19	$-1.3 \cdot 10^{-4}$	4.08	50 000	1 000 000
5	0.14	$-2 \cdot 10^{-4}$	3.53	50 000	100 000

Les lignes qui suivent présentent le programme (rédigé en scilab) qui permet de calculer  $p(t, x)$ . Le résultat obtenu est un vecteur ligne contenant la probabilité que

deux marches aléatoires se rencontrent pour la première fois en  $(t, x)$ . Ce vecteur ne contient plus l'information concernant le  $t$  et le  $x$  considérés.

```
function [y] = P(d,n,N)

//P(d,n,N) 1<i<n
//d : dimension du probleme
//n : longueur maximale des m.a.
//N : nombre de m.a. simulees

//Initialisation du compteur
//colonne : [coord du point d'intersection; instant; compteur]

c=zeros(d+2,1);

for i = 1:N;
    // Construction de 2 m.a. de longueurs n
    // direction du saut de la m.a. (\pm 1)
    x = 2*floor(2*rand(1,2*n))-1;
    // numero de la coordonnee qui saute (dans 1,...,d)
    j = floor(d*rand(1,2*n))+1

    // Matrice des increments n colonnes pour chacun des increments,
    // 2d lignes pour chacune des ma
    xi = zeros(2*d,n);
    // numero de la coord qui saute (numeration des elements
    // de la matrice premiere colonne, puis deuxieme colonne, etc...)
    j = j+(0:d:d*(2*n-1));
    // construction des sauts
    xi(j) = x;

    X = cumsum(xi,'c');

    // on fait un peu de nettoyage
    clear xi;clear j; clear x;

    // vecteur ligne : 0 si les m.a. sont au meme point, 1 sinon
    // (les marches aleatoires se rencontrent lorsque toutes leurs
    // coordonnees sont egales)
    z = prod(X(1:d,:)==X(d+1:2*d,:), 'r');

    // on ne garde en memoire qu'une des 2 m.a.
```

```
X=X(1:d,:);

if z==zeros(1,length(z)) then
    ;
else
    I = find(z); //Instants de rencontre
    T = I(1); //Instant de la premiere rencontre

    //On regarde si des m.a. se sont deja rencontrees en ce point
    s = size(c);
    m = s(2);

    v = [X(1:d,T);T]*ones(1,m); //matrice pleine du vecteur rencontre
    //w vaut 1 a la colonne k si les deux vecteurs sont egaux
    w = prod(c(1:d+1,:)==v,'r');

    if w==zeros(1,length(w)) then
        c(:,m+1) = [X(1:d,T);T;1]; //On rajoute un point de rencontre
    else
        I = find(w);
        k = I(1);
        c(d+2,k)=c(d+2,k)+1;
    end;
end;
end;

//Proportion des m.a. se rencontrant en un point (t,x)
s = size(c);m=s(2);
y=c(d+2,2:m)/N
endfunction
```

Le programme permettant de calculer l'entropie.

```
function [y]=entropie(d,n,N)
// entropie(d,n,N)
// Calcul de l'entropie du reseau Zd
// d : dimension du probleme
// n : longueur des m.a.
// N : nombre de couples de m.a. simulees

getf("P.sci","c");

P1=P(d,n,N);
// les valeurs theoriques de pd de [G90] a 10-6 pres
pd=[0,0,0.340537,0.193202,0.135179];
```

```
// la valeur empirique de pd trouvee par simulation
pd_chap=sum(P1);
// la valeur de l'entropie du reseau
h=-sum(log(P1/pd(d)).*(P1/pd(d)));

// en retour l'erreur commise sur pd et la valeur de l'entropie
y=[d n N pd_chap-pd(d) h];
fd=mopen('entropie.txt','wb');
y=string(y);
mputl(y,fd);
mclose(fd);
```

Le programme permettant de vérifier que  $\beta_2$  est finie.

```
clear
x0=1;

// Definition du cumulante de différentes lois de probabilité
// Binomiale symetrisee
p=0.01;n=5;
deff('[y]=l(b)', 'y= log((p*exp(b)+1-p)^n+(p*exp(-b)+1-p)^n)-log(2)');
deff('[y]=Dl(b)', 'y=(n*p*exp(b)*(p*exp(b)+1-p)^(n-1)-n*p*exp(-b)*
(p*exp(-b)+1-p)^(n-1))/((p*exp(b)+1-p)^n+(p*exp(-b)+1-p)^n)');

// Gaussienne
deff('[y]=l(b)', 'y= b^2/2');
deff('[y]=Dl(b)', 'y=b');

// Poisson symetrisee
x0=0.001;
k=0.01;
deff('[y]=l(b)', 'y=log(exp(-k)/2)+log(exp(k*exp(b))+exp(k*exp(-b)))');
deff('[y]=Dl(b)', 'y=(k*exp(b)*exp(k*exp(b))-k*exp(-b)*exp(k*exp(-b)))
/(exp(k*exp(b))+exp(k*exp(-b)))');

// Bernoulli
p=1/9;
deff('[y]=l(b)', 'y=log(p*exp(b)+(1-p)*exp(-b))');
deff('[y]=Dl(b)', 'y=(p*exp(b)-(1-p)*exp(-b))/(p*exp(b)+(1-p)*exp(-b))');
// Lorsque l'erreur em n'est pas proche de 0, c'est que ça diverge...

// Poisson normale
x0=0.001;
k=1000;
```

```
deff(' [y]=l(b)' , 'y= k*(exp(b)-1)');
deff(' [y]=Dl(b)' , 'y=k*exp(b)');
// Il semblerait qu'il n'y ait pas de k qui permette de tuer l'entropie du réseau

// Binomiale normale
n=5;p=0.001;
deff(' [y]=l(b)' , 'y=n*log(1-p+p*exp(b))');
deff(' [y]=Dl(b)' , 'y=n*p*exp(b)/(1-p+p*exp(b))');
//n=5;p=0.001; suffit à battre tout le monde dès la dimension 3.
// Quand p diminue, visiblement, l'entropie augmente

// Definition des vecteurs dimension et probabilités de retour
d=[3,4,5];
pd=[0.34,0.193,0.135];

for i=1:length(pd)
// Definition de la fonction auxiliaire
deff(' [y]=g(b)' , 'y=l(2*b)-2*l(b)+log(pd(i))');
// Calcul de b2
b2(i)=fsolve(x0,g);
e2(i)=g(b2(i));

// Calcul de la borne supérieure sur bc
deff(' [y]=f(b)' , 'y=l(b)-b*Dl(b)+log(2*d(i))');
bm(i)=fsolve(x0,f);
em(i)=f(bm(i));

// Calcul de l'entropie de l'environnement
h(i)=2*b2(i)*Dl(2*b2(i))-l(2*b2(i));
end
h
e2
em
```

### I.3 Le temps continu et l'équation d'Anderson parabolique

On considère dans cette partie un polymère dirigé défini non plus de manière discrète mais avec une échelle de temps continue. On suppose que ce polymère évolue dans un environnement dont les valeurs sont des mouvements browniens. Bien que ne répondant pas au souhait des physiciens qui préfèrent les modèles à temps discret, les modèles en temps continu présentent l'avantage d'arguments souvent plus faciles à lire. Une illustration de ce fait peut-être consultée dans l'article [CH06] où Ph. Carmona et Y. Hu

utilisent la formule d'Itô pour donner une caractérisation de la phase de fort désordre.

Plus précisément, on note  $\omega$  une marche aléatoire à temps continu sur  $\mathbb{Z}^d$  de taux de saut  $\kappa$ , i.e. les temps entre deux sauts de la marche aléatoire sont indépendants et de loi exponentielle de paramètre  $\kappa$ . Pour tout point  $x$  de  $\mathbb{Z}^d$ , on note  $\mathbf{P}_x$  la loi de la marche aléatoire issue de  $x$ . En particulier, on notera  $p_t(x) = \mathbf{P}_0(\omega_t = x)$ . Nous noterons  $\mathcal{L}$  le générateur de la marche aléatoire et  $\Delta$  le laplacien discret, i.e. pour toute fonction  $f$ ,

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{\kappa}{2d} \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)) = \kappa \Delta f(x),$$

où  $y \sim x$  signifie que  $x$  et  $y$  sont voisins sur le graphe  $\mathbb{Z}^d$ , i.e.  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  et  $\|x - y\|_1 = 1$ . On définit également la tribu engendrée par la marche aléatoire jusqu'à l'instant  $t$ ,  $\mathcal{F}_t = \sigma\{\omega_s, s \leq t\}$ .

En tout point de  $\mathbb{Z}^d$  on définit l'environnement comme étant une famille de mouvements browniens indépendants  $(B_x(t), t \geq 0, x \in \mathbb{Z}^d)$ . On notera  $\mathbf{Q}$  la loi de cette famille de mouvements browniens. Pour ce modèle de polymères, on considère l'*hamiltonien*

$$H_t = \int_0^t dB_{\omega_s}(s).$$

La *fonction de partition* modifiée est définie pour toute température inverse  $\beta \geq 0$  par

$$W_t(\beta; x) = \mathbf{P}_x \left[ e^{\beta \int_0^t dB_{\omega_s}(s) - t\beta^2/2} \right].$$

La *mesure polymère* est alors donnée par

$$\mu_t(\cdot) = \frac{\mathbf{P} \left[ \cdot e^{\beta H_t - t\beta^2/2} \right]}{W_t}.$$

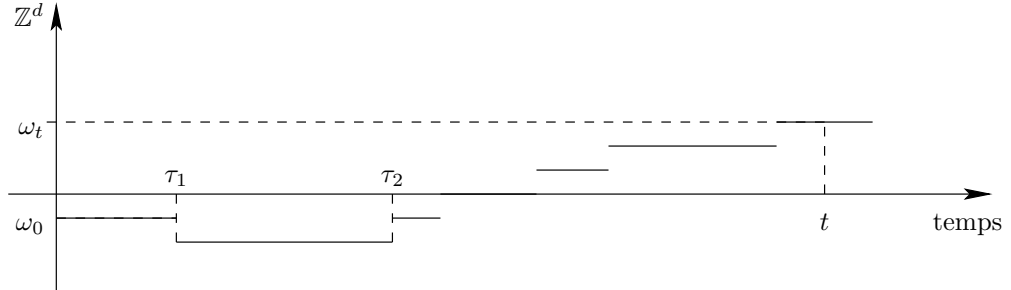


FIG. I.6 – Polymère dirigé en temps continu :  $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{Exp}(\kappa)$

On appellera fonction de partition *point à point* la fonction de partition des polymères conditionnés à se trouver en un certain point à l'instant  $t$ , i.e. pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ ,

$$W_t(\beta; x, y) = \mathbf{P}_x \left[ e^{\beta \int_0^t dB_{\omega_s}(s) - t\beta^2/2} \mathbb{1}_{\omega_t=y} \right].$$

*Remarque.* Par la suite, nous oublierons souvent la dépendance en  $\beta$  et noterons  $W_t(\beta; x, y) = W_t(x, y)$ .

On se propose d'étudier la limite de l'énergie libre  $\frac{1}{t} \ln W_t$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , puis d'établir une asymptote de cette limite lorsque  $\beta \rightarrow \infty$  (i.e. à température nulle). Nous démontrons dans le théorème I.8 l'existence de la quantité

$$p(\kappa, \beta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln W_t(\beta).$$

**Théorème I.3.** *En utilisant les notations définies précédemment, pour  $\kappa > 0$  :*

$$p(\kappa, \beta) + \frac{\beta^2}{2} \sim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2}{8} \frac{\beta^2}{\ln \beta},$$

où  $\alpha$  est une constante définie dans le théorème I.11.

*Remarque.* Un résultat analogue a été obtenu par D. Márquez-Carreras, C. Rovira et S. Tindel [MCRT08]. Cependant, dans les notes qui suivent, nous utiliserons uniquement les propriétés de changement d'échelle des marches aléatoires et du mouvement brownien, évitant ainsi de nombreux calculs.

On rappelle que  $u$  est solution de l'équation d'Anderson parabolique si

$$\begin{cases} du &= \kappa \Delta u(t, x) dt + u(t, x) dB_x(t) \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

Nous utiliserons les propriétés de convergence des fonctions de partition des polymères dirigés pour retrouver le résultat de [CMS02] (cf. Corollary 2.13) sans faire appel à la percolation.

**Théorème I.4.** *Il existe une fonction  $\kappa \mapsto \gamma(\kappa)$  telle que pour toute fonction  $u_0$  positive bornée,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln u(t) = \gamma.$$

Nous montrerons que  $\gamma(\kappa) = p(\kappa, 1) + \frac{1}{2}$ .

Dans un premier temps, nous rappellerons le lien entre fonction de partition point à point et équation d'Anderson parabolique. Ensuite, nous montrerons l'existence de la limite de l'énergie libre en utilisant les résultats de concentration du calcul de Malliavin. Enfin nous montrerons dans la partie I.3.3 (resp. I.3.4) le théorème I.3 (resp. I.4) énoncé précédemment.

### I.3.1 Les polymères dirigés et l'équation d'Anderson parabolique

Dans cette partie, nous nous proposons de rappeler le lien qui relie l'équation d'Anderson parabolique aux polymères dirigés.

**Théorème I.5.** *Les fonctions de partition point à point satisfont l'équation d'Anderson parabolique : pour tout  $\beta \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,*

$$dW_t(0, x) = \mathcal{L}W_t(0, \cdot)(x) dt + \beta W_t(0, x) dB_x(t).$$



*Démonstration.* Notons  $M_t^\omega$  la martingale exponentielle

$$M_t^\omega = e^{\beta H_t(\omega) - t \frac{\beta^2}{2}}.$$

On obtient ainsi en utilisant la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} W_t(0, x) &= \mathbf{P} [\mathbb{1}_{\omega_t=x} M_t^\omega] \\ &= \mathbf{P} \left[ \mathbb{1}_{\omega_t=x} \left( 1 + \int_0^t M_s^\omega \beta dB_{\omega_s}(s) \right) \right] \\ &= \mathbf{P}(\omega_t = x) + \beta \mathbf{P} \left[ \int_0^t \mathbb{1}_{\omega_t=x} M_s^\omega dB_{\omega_s}(s) \right] \\ &= p_t(x) + \beta \mathbf{P} \left[ \int_0^t \mathbf{P} [\mathbb{1}_{\omega_t=x} | \mathcal{F}_s] M_s^\omega dB_{\omega_s}(s) \right] \\ &= p_t(x) + \beta \mathbf{P} \left[ \int_0^t p_{t-s}(x - \omega_s) M_s^\omega dB_{\omega_s}(s) \right], \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété de Markov puis les propriétés de symétrie des marches aléatoires simples.

On remarque ensuite que la définition du générateur nous permet d'obtenir,

$$\begin{aligned} p_{t-s}(y) &= p_0(y) + \int_s^t \partial_u p_{u-s}(y) du \\ &= \mathbb{1}_{y=0} + \int_s^t \mathcal{L} p_{u-s}(y) du. \end{aligned}$$

En injectant cette dernière relation dans l'expression précédente,

$$\begin{aligned} W_t(0, x) &= p_t(x) + \beta \mathbf{P} \left[ \int_0^t \int_s^t \mathcal{L} p_{u-s}(\omega_s - x) du M_s^\omega dB_{\omega_s}(s) \right] + \dots \\ &\dots + \beta \int_0^t W_s(0, x) dB_x(s). \end{aligned}$$

Or, comme la quantité  $\int \int (\mathcal{L} p_{u-s}(\omega_s - x) M_s^\omega)^2 du ds$  est finie, on peut utiliser le théorème de Fubini stochastique (cf. [RY05] p. 175)

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \int_0^t \int_s^t \mathcal{L} p_{u-s}(\omega_s - x) du M_s^\omega dB_{\omega_s}(s) &= \int_0^t \mathcal{L} \mathbf{P} \left[ \int_0^u p_{u-s}(\omega_s - \cdot) M_s^\omega dB_{\omega_s}(s) \right] (x) du \\ &= \int_0^t \mathcal{L} \{W_u(0, \cdot) - p_u(\cdot)\} (x) du. \end{aligned}$$

et on a bien le résultat attendu,

$$W_t(0, x) = W_0(0, x) + \int_0^t \mathcal{L} W_s(0, \cdot)(x) ds + \beta \int_0^t W_s(0, x) dB_x(s).$$

□

### I.3.2 Quelques résultats de convergence

On se propose, dans cette partie, de vérifier que les théorèmes de convergence vrais dans le cadre discret sont toujours vérifiés dans le cadre continu.

*La convergence  $L^1$*

On commence par s'intéresser à la convergence de l'énergie libre. La convergence en norme  $L^1$  repose sur une propriété de sous-additivité héritée de la propriété de Markov.

**Lemme I.3.1 (Propriété de Markov).** *Pour tous  $s, t > 0$ ,*

$$W_{t+s}(\beta; x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} W_t(\beta; x, z) W_s(\beta; z, \theta_t B), \quad (\text{I.12})$$

où  $\theta_t B$  désigne le mouvement brownien translaté d'un temps  $t$ .

*Démonstration.* On utilise la propriété de Markov de la marche aléatoire  $\omega$  :

$$\begin{aligned} W_{t+s}(\beta; x) &= \mathbf{P}_x \left[ e^{\beta H_{t+s}(\omega, B) - (t+s)\beta^2/2} \right] \\ &= \mathbf{P}_x \left[ e^{\beta H_t - t\beta^2/2} e^{\beta \int_0^s dB_{\omega(t+u)}(u) - s\beta^2/2} \right] \\ &= \mathbf{P}_x \left[ e^{\beta H_t - t\beta^2/2} W_s(\beta; \omega_t, \theta_t B) \right] \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} W_t(\beta; x, z) W_s(\beta; z, \theta_t B). \end{aligned}$$

□

**Théorème I.6 (Convergence  $L^1$ ).** *Il existe une fonction  $(\kappa, \beta) \mapsto p(\kappa, \beta)$  telle que :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbf{Q} [\ln W_t(0)] = p(\kappa, \beta) \text{ dans } L^1.$$

*Démonstration.* On va utiliser un résultat de sous-additivité à partir de la propriété (I.12) de Markov :

$$\begin{aligned} W_{t+s}(0) &= W_t(0) \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mu_t(\omega_t = z) W_s(z, \theta_t B) \\ \ln W_{t+s}(0) &= \ln W_t(0) + \ln \sum_z \mu_t(\omega_t = z) W_s(z, \theta_t B) \\ &\geq \ln W_t(0) + \sum_z \mu_t(\omega_t = z) \ln W_s(z, \theta_t B) \\ \mathbf{Q} [\ln W_{t+s}(0)] &\geq \mathbf{Q} [\ln W_t(0)] + \sum_z \mu_t(\omega_t = z) \mathbf{Q} [\ln W_s(z, \theta_t B)] \\ &\geq \mathbf{Q} [\ln W_t(0)] + \mathbf{Q} [\ln W_s(0)]. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant le théorème de convergence des suites sous-additives (cf. [Dur96], Lemma 9.1 p. 69). □

*Quelques rappels sur le calcul de Malliavin*

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On considère un processus gaussien  $(B_h, h \in H)$  tel que pour tous  $g, h \in H$ ,  $\mathbf{Q}[B_h B_g] = \langle h, g \rangle$ . Le calcul de Malliavin permet de définir une notion de différentielle sur de tels espaces.

Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . On définit

$$DF(B_{h_1}, \dots, B_{h_n}) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F(B_{h_1}, \dots, B_{h_n}) h_i.$$

On note  $\mathbb{D}^{1,p}$  la fermeture de l'espace de Schwartz des fonctions de classe  $C^\infty$  à croissance polynomiale  $\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R})\}$  par rapport à la norme

$$\|F\|_{1,p} = (\mathbf{Q}[|F|^p] + \mathbf{Q}[\|DF\|^p])^{1/p}.$$

On peut alors définir l'itérée de  $D$  et considérer l'espace  $\mathbb{D}^{k,p}$  munit de la norme

$$\|F\|_{k,p}^p = \mathbf{Q}[|F|^p] + \sum_{j=1}^k \mathbf{Q}[\|D^j F\|_{H^{\otimes j}}^p].$$

On note  $\mathbb{D}^\infty = \bigcap_{p \geq 1} \bigcap_{k \geq 1} \mathbb{D}^{k,p}$ .

**Proposition I.3.2** (cf. [Nua98] Proposition 1.1.1). *Soient  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ ,  $p \geq 1$  et  $F$  une variable aléatoire de  $\mathbb{D}^{1,p}$ . Alors,  $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$  et*

$$D(\varphi(F)) = \varphi'(F) DF.$$

On utilisera également le résultat de concentration suivant,

**Théorème I.7** (cf. [ÜZ00] Theorem B.8.1). *Soient  $p > 1$ ,  $F \in \mathbb{D}^{1,p}$  avec  $DF \in L^\infty$ . Alors, nous avons l'estimée de la queue de probabilité*

$$\mathbf{Q}(|F - \mathbf{Q}[F]| > c) \leq 2e^{-\frac{c^2}{2\|DF\|_\infty^2}}.$$

*La convergence p.s.*

Pour passer de la convergence  $L^1$  à la convergence p.s., on va utiliser le résultat de concentration précédent. On notera pour simplifier  $W_t = W_t(\beta; x)$ .

**Lemme I.3.3 (Inégalité de concentration).** *Pour tout  $u > 0$ ,*

$$\mathbf{Q}(|\ln W_t - \mathbf{Q}[\ln W_t]| \geq u) \leq 2e^{-\frac{u^2}{2\beta^2 t}}.$$

*Démonstration.* On commence par fixer le cadre dans lequel nous utilisons les résultats du calcul de Malliavin.

Soit  $\Omega$  l'espace des chemins pouvant être empruntés par les marches aléatoires de longueur  $t$ , i.e.

$$\Omega = \left\{ \omega : [0, t] \rightarrow \mathbb{Z}^d; \|\omega_s - \omega_{s-}\|_1 \leq 1 \right\},$$

pour  $x \in \mathbb{Z}^d$ , on notera  $\omega(s, x) = \mathbb{1}_{\omega_s=x}$  la fonction de  $[0, t] \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  qui donne la composante de  $\omega$  en  $x$  au temps  $s$ .

Par abus de notation, on note

$$\Omega = \left\{ \omega : [0, t] \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \{0, 1\}; \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \|\omega(s, x) - \omega(s-, x)\|_1 \leq 1, \forall s \in [0, t] \right\}.$$

Pour  $\gamma, \tau \in \Omega$ , on définit le produit scalaire :

$$\langle \gamma, \tau \rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \int_0^t \gamma(s, x) \tau(s, x) ds.$$

On remarque que, pour  $\gamma, \tau \in \Omega$ ,  $\langle \gamma, \tau \rangle \leq t$ .

On note  $H$  l'espace de Hilbert  $L^2([0, t] \times \mathbb{Z}^d)$  muni de la norme

$$\|h\|^2 = \int_{[0, t]} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |h(s, x)|^2 ds.$$

On note également  $\mathcal{H} = \left\{ B_\gamma := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \int_0^t \gamma(s, x) dB_x ds, \gamma \in H \right\}$ . On a bien

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \left[ \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \int_0^t \gamma(s, x) dB_x(s) \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \int_0^t \tau(s, y) dB_y(s) \right] &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \int_0^t \gamma(s, x) \tau(s, x) ds \\ &= \langle \gamma, \tau \rangle. \end{aligned}$$

On remarque enfin que pour  $\gamma \in \Omega$  et en notant  $(t_i)$  les instants de saut de  $\gamma$ , on a

$$\begin{aligned} B_\gamma &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \int_0^t \mathbb{1}_{\gamma(s)=x} dB_x(s) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{1}_{\gamma(s)=x} dB_x(s) \\ &= \sum_i \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{1}_{\gamma(s)=x} dB_x(s) \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} dB_{\gamma(s)}(s) \\ &= \int_0^t dB_{\gamma(s)}(s). \end{aligned}$$

On note  $M_t^\gamma$  la martingale  $e^{\beta \int_0^t dB_{\gamma_s}(s) - t\beta^2/2}$ . On a ainsi

$$W_t = \int_{\Omega} M_t^\gamma \mathbf{P}(\omega \in d\gamma).$$

En utilisant la proposition I.3.2 de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned} D(\ln W_t) &= \frac{DW_t}{W_t} \\ &= \frac{\int DM_t^\omega \mathbf{P}(d\omega)}{W_t} \\ &= \frac{1}{W_t} \int \beta \omega e^{\beta \int_0^t B_{\omega_s}(s) - t\beta^2/2} \mathbf{P}(d\omega) \\ &= \beta \mu_t(\omega), \end{aligned}$$

où on rappelle que  $\mu_t$  désigne la mesure de Gibbs du polymère. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \langle D \ln W_t, D \ln W_t \rangle &= \frac{1}{W_t^2} \left\langle \int \beta \gamma e^{\beta \int_0^t dB_{\gamma_s}(s) - t\beta^2/2} \mathbf{P}(d\gamma), \right. \\ &\quad \left. \int \beta \tau e^{\beta \int_0^t dB_{\tau_s}(s) - t\beta^2/2} \mathbf{P}(d\tau) \right\rangle \\ &= \frac{\beta^2}{W_t^2} \int \langle \gamma, \tau \rangle e^{\beta \int_0^t dB_{\gamma_s}(s) - t\beta^2/2} \\ &\quad e^{\beta \int_0^t dB_{\tau_s}(s) - t\beta^2/2} \mathbf{P}(d\gamma) \mathbf{P}(d\tau) \\ &= \beta^2 \mu^{\otimes 2}(\langle \gamma, \tau \rangle) \\ &\leq \beta^2 t. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le théorème I.7 de concentration du calcul de Malliavin,

$$\mathbf{Q}(|\ln W_t - \mathbf{Q}[\ln W_t]| \geq u) \leq 2 \exp\left(-\frac{u^2}{2\beta^2 t}\right).$$

□

**Théorème I.8 (Convergence presque-sûre).** *En utilisant les notations précédentes, on a la limite presque-sûre suivante*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln W_t = p(\kappa, \beta), \quad \mathbf{Q} - p.s.$$

*Démonstration.* On définit pour cela le processus :

$$V_t = \ln W_t - \mathbf{Q}[\ln W_t].$$

Pour  $\omega^1, \omega^2$  deux marches aléatoires indépendantes, on note  $I_s$  leur probabilité d'intersection à l'instant  $s$  sous la mesure polymère, i.e.  $I_s = \mu_s^{\otimes 2}(\omega_s^1 = \omega_s^2)$ . La formule

d'Itô permet alors d'obtenir

$$\begin{aligned} d \ln W_t &= \frac{1}{W_t} dW_t - \frac{1}{2W_t^2} d[W, W]_t \\ &= \frac{1}{W_t} dW_t - \frac{\beta^2}{2} I_t dt, \\ \ln W_t &= M_t - \frac{1}{2} [M, M]_t, \end{aligned}$$

où  $[M, M]_t \leq \beta^2 t$ .

Soit  $t_n$  une suite croissante,  $t_n \rightarrow \infty$ ,  $1/2 < \gamma < 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \left[ \sup_{t_n \leq s \leq t_{n+1}} |V_s - V_{t_n}| \right] &\leq \mathbf{Q} \left[ \sup_{t_n \leq s \leq t_{n+1}} |M_s - M_{t_n}| \right] + \beta^2 (t_{n+1} - t_n) \\ &\leq C t_n^\gamma + \beta^2 (t_{n+1} - t_n), \end{aligned}$$

où on a utilisé la majoration de  $[M, M]_t$  combinée avec l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (cf. [RY05] Theorem 4.1 p. 160).

On utilise ensuite le lemme de concentration :

$$\mathbf{Q}(|V_{t_n}| \geq t_n^\gamma) \leq 2 \exp \left( - \frac{t_n^{2\gamma-1}}{2\beta^2} \right).$$

On utilise enfin le théorème de Borel-Cantelli et on choisit :  $t_{n+1} = t_n + t_n^\gamma$  pour conclure.  $\square$

*La convergence de l'énergie libre point à point*

On rappelle la définition de la fonction de partition point à point :

$$W_t(x, y) = \mathbf{P}_x \left[ e^{\beta \int_0^t dB_{\omega_s}(s) - t\beta^2/2} \mathbb{1}_{\omega_t=y} \right].$$

Comme précédemment, on montre la propriété de Markov suivante.

**Lemme I.3.4 (Propriété de Markov).** *Pour tous  $s, t > 0$ ,*

$$W_{t+s}(x, y) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} W_t(x, z) W_s(z, y, \theta_t B) \quad (\text{I.13})$$

On va s'intéresser à une marche aléatoire qui revient en 0. Nous noterons ainsi  $W_t = W_t(\beta; 0)$  et  $W_t^0 = W_t(\beta; 0, 0)$ . On établit ainsi le théorème suivant :

**Théorème I.9 (Convergence  $L^1$ ).** *Il existe une fonction  $(\kappa, \beta) \mapsto p_1(\kappa, \beta)$  telle que :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbf{Q} [\ln W_t^0] = p_1(\kappa, \beta) \text{ dans } L^1.$$

*Démonstration.* Il suffit d'établir une relation de sous-additivité :

$$\begin{aligned} W_{t+s}(0, 0) &= \sum_z W_t(0, z) W_s(z, 0, \theta_t B) \\ &\geq W_t(0, 0) W_s(0, 0, \theta_t B) \\ \mathbf{Q}[\ln W_{t+s}(0, 0)] &\geq \mathbf{Q}[\ln W_t^0] + \mathbf{Q}[\ln W_s^0]. \end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat annoncé en utilisant le lemme de suradditivité.  $\square$

On peut, comme précédemment, établir l'inégalité de concentration suivante. Notons  $Y_t^0$  le processus  $\ln W_t^0 - \mathbf{Q}[\ln W_t^0]$ .

**Lemme I.3.5 (Inégalité de concentration).** *Soit  $t > 0$ . Alors,*

$$[Y^0, Y^0]_s \leq \beta^2 s.$$

*Ainsi, on obtient*

$$\mathbf{Q}(|\ln W_t^0 - \mathbf{Q}[\ln W_t^0]| \geq u) \leq 2 \exp\left(-\frac{u^2}{2\beta^2 t}\right).$$

*Démonstration.* La construction des espaces de Hilbert est similaire dans ce cas. En notant

$$\mu_{t,0}(\cdot) = \frac{1}{W_t^0} \mathbf{P} \left[ \cdot \mathbb{1}_{\omega_t=0} e^{\beta H_t - t \frac{\beta^2}{2}} \right],$$

le seul changement est le suivant :

$$\begin{aligned} \langle D \ln W_t^0, D \ln W_t^0 \rangle &= \beta^2 \mu_{t,0}^{\otimes 2}(\langle \gamma, \tau \rangle) \\ &\leq \beta^2 t. \end{aligned}$$

$\square$

**Théorème I.10 (Convergence p.s.).** *En utilisant les notations précédentes,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln W_t^0 = p_1(\kappa, \beta), \quad \mathbf{Q} - p.s..$$

*Démonstration.* Posons  $V_t^0 = \ln W_t^0 - \mathbf{Q}[\ln W_t^0]$  avec  $\ln W_t^0 = M_t^0 - \frac{\beta^2}{2} A_t$  où  $M_t^0$  désigne la partie martingale,  $A_t^0$  le processus à accroissements finis. On utilise les mêmes arguments que dans la partie précédente car l'équation d'Anderson parabolique permet d'obtenir les majorations  $A_t^0 \leq t$ ,  $M_t^0 \leq t$ .  $\square$

### I.3.3 Le comportement asymptotique de l'énergie libre

*Quelques rappels autour d'une fonction du mouvement brownien*

Pour  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{Z}^d$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $\Omega_{I,j}^x$  l'ensemble des chemins de marches aléatoires définis sur l'intervalle de temps  $[a, b]$  qui sautent exactement  $j$  fois, i.e.

$$\Omega_{I,j}^x = \{\gamma : I \rightarrow \mathbb{Z}^d, \gamma(a) = x, \|\gamma_s - \gamma_{s-}\|_1 \leq 1, \text{ pour tout } s \in I, N(\gamma, I) = j\}.$$

On notera  $N(\gamma, I)$  le nombre de sauts de la marche aléatoire  $\gamma$  durant l'intervalle de temps  $I$ . On définit alors l'énergie maximale des polymères définis par ces chemins,

$$A_{I,j}^x = \sup_{\gamma \in \Omega_{I,j}^x} \int_a^b dB_{\gamma_s}(s).$$

On montre alors le théorème suivant en utilisant le théorème de sous-additivité de Kingmann (cf. [Lig85] Theorem 2.6 p. 277).

**Théorème I.11 (cf. [CMS02] Theorem 1.3).** *Soit  $A_{0,n} = A_{[0,n],n}^0$ . Il existe une constante  $\alpha$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{0,n}}{n} = \alpha.$$

*L'énergie libre et taux de saut*

Pour utiliser les résultats déjà obtenus précédemment par [CKM01] et [CMS02], on note

$$\begin{aligned} \gamma(\kappa) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln Z_t(1) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln W_t(1) + \frac{\beta^2}{2} \\ &= p(\kappa, 1) + \frac{\beta^2}{2}. \end{aligned}$$

Dans [CKM01], les auteurs montrent dans le Theorem 1.1 qu'il existe une constante  $c_0$  telle que  $\gamma(\kappa) \sim_0 \frac{c_0}{\ln 1/\kappa}$ . Ce résultat est raffiné dans [CMS02] où les auteurs montrent le théorème suivant.

**Théorème I.12 (cf. [CMS02] Theorem 2.14).** *Rappelons que  $\gamma(\kappa) = p(\kappa, 1) + \frac{\beta^2}{2}$ . On a alors,*

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \gamma(\kappa) \ln \left( \frac{1}{\kappa} \right) = \frac{\alpha^2}{4},$$

où  $\alpha$  est définie dans le théorème I.11.



*Le changement d'échelle, le taux de saut et la température*

L'utilisation du résultat précédent pour obtenir le comportement asymptotique sur l'énergie libre repose sur les propriétés de changement d'échelle des marches aléatoires.

**Lemme I.3.6.** *Soit  $c > 0$ . Si  $\omega$  est une marche aléatoire continue de taux de saut  $\kappa$ , alors  $\omega_{\cdot/c}$  est une marche aléatoire continue de taux de saut  $\frac{\kappa}{c}$ .*

*Démonstration.* Notons  $P_t$  le semigroupe de la marche aléatoire,  $\mathcal{L}$  son générateur et  $\Delta$  l'opérateur laplacien sur  $\mathbb{Z}^d$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f - f) = \kappa \Delta f$ , en notant  $\tilde{P}_t, \tilde{\mathcal{L}}$  les caractéristiques de  $\tilde{\omega}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\tilde{P}_t f - f) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1/c}{t/c} (P_{t/c} f - f) \\ &= \frac{\kappa}{c} \Delta f. \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème I.3 annoncé.

*Démonstration du théorème I.3.* Soit  $\omega$  une réalisation de la marche aléatoire de taux de saut  $\kappa$ ;  $\tau_1, \dots, \tau_n, \dots$  ses temps de saut,  $\omega_i = \omega(\tau_i^+)$ . On remarque que

$$\begin{aligned} H_t(\omega, B) &= \int_0^t dB_{\omega_s}(s) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (B_{\omega_i}(\tau_{i+1} \wedge t) - B_{\omega_i}(\tau_i \wedge t)). \end{aligned}$$

On considère le mouvement brownien changé d'échelle  $B_x^{(c)}(s) = \frac{1}{\sqrt{c}} B_x(cs) \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_x(s)$ ,

$$H_t(\omega, B^{(c)}) = \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{i=0}^{\infty} (B_{\omega_i}(c\tau_{i+1} \wedge ct) - B_{\omega_i}(c\tau_i \wedge ct)).$$

La propriété de changement d'échelle permet d'effectuer les changements de temps suivants,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{s : \|\omega_s - \omega_{s-}\|_1 = 1\}, \\ c\tau_1 &= \inf\{cs : \|\omega_s - \omega_{s-}\|_1 = 1\} \\ &= \inf\{s : \|\omega_{s/c} - \omega_{s/c-}\|_1 = 1\}, \dots \end{aligned}$$

Ainsi, en notant la marche changée d'échelle  $\tilde{\omega}_s = \omega_{s/c}$  dont les instants de saut sont  $(\tilde{\tau}_i)_i$  et en utilisant les propriétés précédentes,

$$\begin{aligned} H_t(\omega, B^{(c)}) &= \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{i=0}^{\infty} (B_{\tilde{\omega}_i}(\tilde{\tau}_{i+1} \wedge ct) - B_{\tilde{\omega}_i}(\tilde{\tau}_i \wedge ct)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} H_{ct}(\tilde{\omega}, B). \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
 p(\kappa, \beta) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbf{Q} \left[ \ln \mathbf{P} \left[ e^{\beta H_t(\omega, B)} \right] \right] - \frac{\beta^2}{2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbf{Q} \left[ \ln \mathbf{P} \left[ e^{\beta H_t(\omega, B^{(c)})} \right] \right] - \frac{\beta^2}{2} \\
 &= \underbrace{c \lim_t \frac{1}{ct} \mathbf{Q} \left[ \ln \mathbf{P} \left[ e^{\frac{\beta}{\sqrt{c}} H_{ct}(\tilde{\omega}, B)} \right] \right]}_{p\left(\frac{\kappa}{c}, \frac{\beta}{\sqrt{c}}\right) + \frac{\beta^2}{2c}} - \frac{\beta^2}{2} \\
 &= \beta^2 \gamma\left(\frac{\kappa}{\beta^2}\right) - \frac{\beta^2}{2},
 \end{aligned}$$

où on a choisi  $c = \beta^2$  dans la dernière égalité.

Or, d'après le théorème I.12,  $\gamma(\kappa) \sim_0 \frac{\alpha^2/4}{\ln(1/\kappa)}$ . Finalement, on obtient bien

$$p(\kappa, \beta) + \frac{\beta^2}{2} \sim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2}{8} \frac{\beta^2}{\ln \beta}.$$

□

### I.3.4 Les solutions de l'équation d'Anderson parabolique

**Théorème I.13.** *Avec les notations précédentes,*

$$p(\kappa, \beta) = p_1(\kappa, \beta).$$

*Démonstration.* D'après la définition,  $W_t^0 \leq W_t$ , soit

$$p_1(\kappa, \beta) \leq p(\kappa, \beta).$$

Il suffit donc de montrer l'inégalité inverse. Pour cela, nous nous inspirons des calculs effectués dans [CH04].

Tout d'abord, d'après la propriété de Markov (I.13), pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$\begin{aligned}
 W_{2t}^0 &\geq W_t(0, x) W_t(x, 0, \theta_t B) \\
 \mathbf{Q} [\ln W_{2t}^0] &\geq \mathbf{Q} [\ln W_t(0, x)] + \mathbf{Q} [\ln W_t(x, 0)],
 \end{aligned}$$

soit, comme la marche aléatoire est équilibrée,

$$\mathbf{Q} [\ln W_{2t}^0] \geq 2 \mathbf{Q} [\ln W_t(0, x)]. \quad (\text{I.14})$$

Par ailleurs, pour toute constante positive  $M$ , et  $t \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} [\ln W_t] &= \frac{1}{t} \mathbf{Q} \ln W_t^t \\
 &\leq \frac{1}{t} \ln \mathbf{Q} [W_t^t] \\
 &= \frac{1}{t} \ln \left\{ \mathbf{Q} \left[ \sum_{|x| \leq Mt} W_t(0, x)^t \right] + \mathbf{Q} \left[ \sum_{|x| \geq Mt} W_t(0, x)^t \right] \right\} \\
 &\leq \frac{1}{t} \ln \left\{ \mathbf{Q} \left[ \sum_{|x| \leq Mt} e^{t \ln W_t(0, x)} \right] + \mathbf{Q} \mathbf{P} \left[ e^{t\beta H_t - t^2 \frac{\beta^2}{2}} \mathbb{1}_{[Mt, +\infty]} (N(\omega, t)) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

D'une part, comme la variable aléatoire  $N(\omega, t)$  (nombre de sauts de la marche aléatoire  $\omega$  durant l'intervalle de temps  $[0, t]$ ) suit une loi de Poisson de paramètre  $\kappa t$ , l'inégalité de Markov nous permet d'obtenir,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} \left[ \mathbf{P} \left[ e^{t\beta H_t - t^2 \frac{\beta^2}{2}} \mathbb{1}_{[Mt, +\infty]} (N(\omega, t)) \right] \right] &= \mathbf{P} \left[ \mathbf{Q} \left[ e^{t\beta H_t - t^2 \frac{\beta^2}{2}} \mathbb{1}_{[Mt, +\infty]} (N(\omega, t)) \right] \right] \\
 &= \mathbf{P} (N(\omega, t) \in [Mt, +\infty)) \\
 &\leq e^{-Mt} \mathbf{Q} \left[ e^{N(\omega, t)} \right] \\
 &= e^{-(M+\kappa-\epsilon\kappa)t}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} \left[ \sum_{|x| \leq Mt} e^{t \ln W_t(0, x)} \right] &= \mathbf{Q} \left[ \sum_{|x| \leq Mt} e^{t[\ln W_t(0, x) - \mathbf{Q} \ln W_t(0, x)] + t \mathbf{Q} \ln W_t(0, x)} \right] \\
 &\leq c \sum_{|x| \leq Mt} e^{t \mathbf{Q} \ln W_t(0, x)} \\
 &\leq c \sum_{|x| \leq Mt} e^{\frac{t}{2} \mathbf{Q} \ln W_{2t}^0} \\
 &\leq c(2Mt + 1)^d e^{\frac{t}{2} \mathbf{Q} \ln W_{2t}^0},
 \end{aligned}$$

où la première inégalité est une conséquence de l'inégalité de concentration et la seconde est la conséquence de l'inégalité (I.14) établie précédemment.

Ainsi, on obtient la majoration

$$\frac{1}{t} \mathbf{Q} [\ln W_t] \leq \frac{1}{2t} \mathbf{Q} [\ln W_{2t}^0] + \frac{1}{t} \ln \left\{ c(2Mt + 1)^d + e^{-(M+\kappa-\epsilon\kappa)t - \frac{1}{2} \mathbf{Q} [\ln W_{2t}^0]} \right\}.$$

Finalement, en choisissant  $M$  assez grand, on obtient bien l'inégalité manquante,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbf{Q} [\ln W_t] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \mathbf{Q} [\ln W_{2t}^0].$$

□

*Démonstration du Théorème I.4.* Étant donnée une condition initiale  $u_0$  bornée par 1, positive, non nulle, on a

$$\delta \mathbb{1}_0(x) \leq u_0(x) \leq 1.$$

On obtient ainsi l'encadrement suivant,

$$\frac{1}{t} \mathbf{Q} \ln [W_t^0] \leq \frac{1}{t} \mathbf{Q} \ln \mathbf{P} \left[ u_0(\omega_t) e^{H_t - \frac{t}{2}} \right] \leq \frac{1}{t} \mathbf{Q} \ln [W_t].$$

Soit finalement en utilisant le théorème précédent à température 1,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbf{Q} \ln \mathbf{P} [u_0(\omega_t) e^{H_t}] = \gamma(\kappa).$$

□



---

## II - LES RÉSEAUX CONDUCTEURS DE CHALEUR

---

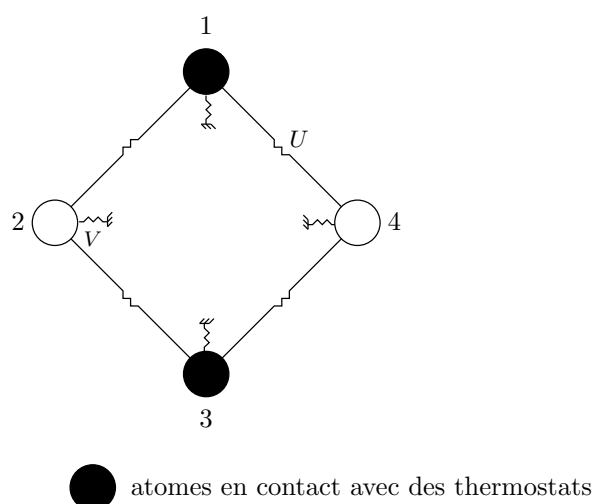


FIG. II.1 – Un réseau d'oscillateurs : le diamant

### Plan du chapitre

---

<b>II.1 Introduction</b>	<b>48</b>
II.1.1 Le modèle	48
II.1.2 Le semigroupe et le générateur	49
II.1.3 La non-explosion de la diffusion	50
II.1.4 Les mesures invariantes	51
II.1.5 Plan du chapitre	53
<b>II.2 Les oscillateurs harmoniques</b>	<b>56</b>
II.2.1 L'asymétrie	56
II.2.2 La complétude et l'existence de mesures invariantes	62
II.2.3 La non-unicité	65
<b>II.3 La régularité et l'unicité de la mesure invariante</b>	<b>66</b>
II.3.1 L'hypoellipticité, Hörmander et la régularité	66

II.3.2	Le support, la régularité et l'unicité . . . . .	70
II.3.3	Hörmander en pratique . . . . .	74
<b>II.4</b>	<b>L'unicité : le principe de Lasalle . . . . .</b>	<b>79</b>
II.4.1	Le théorème du support de Stroock-Varadhan . . . . .	80
II.4.2	Le principe de Lasalle et l'unicité . . . . .	80
<b>II.5</b>	<b>L'unicité : la contrôlabilité . . . . .</b>	<b>86</b>
II.5.1	Discussion . . . . .	86
II.5.2	La contrôlabilité forte . . . . .	87
II.5.3	La contrôlabilité faible . . . . .	89
II.5.4	La démonstration du théorème II.13 . . . . .	89
<b>II.6</b>	<b>L'existence de mesures invariantes . . . . .</b>	<b>94</b>
II.6.1	La compacité . . . . .	94
II.6.2	La non-compacité . . . . .	98

---

## II.1 Introduction

### II.1.1 Le modèle

#### *Les oscillateurs*

On considère un réseau de  $N$  oscillateurs de masse unité numérotés  $\{1, \dots, N\}$ . On munit  $\mathcal{V} := \{1, \dots, N\}$  d'une relation d'équivalence  $\sim$  et on dit que deux atomes  $i, j$  du réseau sont voisins si  $i \sim j$ . Le couple  $G := (\mathcal{V}, \sim)$  sera appelé le *graphe* ou réseau. La position (resp. quantité de mouvement) de la particule  $i$  est notée  $q_i$  (resp.  $p_i$ ).

#### *L'hamiltonien*

L'hamiltonien  $H$  du système est fonction du potentiel d'interaction  $U$  et du potentiel d'accrochage  $V$  (cf. figure II.1).

$$H(q, p) = \sum_{i \in \mathcal{V}} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i \in \mathcal{V}} V(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{j \sim i} U(q_i - q_j).$$

Nous supposons que ces potentiels sont des polynômes convexes, confinants (i.e.  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ ). Ils ont donc des moments exponentiels négatifs de tout ordre par rapport à la mesure de Lebesgue.

*Remarque.* Lorsque le réseau considéré est une chaîne à  $N$  atomes, on obtient l'expression suivante pour l'hamiltonien :

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + V(q_i) + \sum_{i=2}^N U(q_i - q_{i-1}).$$

## II.1. Introduction

---

### Les équations

Parmi les atomes de  $\mathcal{V}$ , on distingue ceux qui sont en contact avec des thermostats. On notera  $\partial\mathcal{V}$  l'ensemble de ces atomes et pour tout atome  $i \in \partial\mathcal{V}$ ,  $T_i \in \mathbb{R}_+^*$  la température du thermostat auquel il est relié. L'interaction entre l'atome et le thermostat est modélisée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. On décrit ainsi l'évolution de ce système mécanique via la diffusion : pour tout  $i \in \mathcal{V}$ ,

$$\begin{cases} dq_i &= p_i dt \\ dp_i &= -\partial_{q_i} H dt + (-p_i dt + \sqrt{2T_i} dB_i) \mathbb{1}_{i \in \partial\mathcal{V}}, \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

où  $(B_i)_{i \in \partial\mathcal{V}}$  est une famille de mouvements browniens indépendants.

J.-P. Eckmann, C.-A. Pillet et L. Rey-Bellet [EPRB99a], ont obtenus des équations analogues comme approximation markovienne d'un modèle microscopique de réseau d'oscillateurs en contact avec de grands thermostats. Suivant les notations introduites dans [MNV03] et [Car07], nous considérons le système simplifié présenté ci-dessus.

On remarque que comme  $U$  est *paire*,

$$\begin{aligned} \partial_{q_i} H &= V'(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{j \sim i} U'(q_i - q_j) - \frac{1}{2} \sum_{j \sim i} U'(q_j - q_i) \\ &= V'(q_i) + \sum_{j \sim i} U'(q_i - q_j), \end{aligned}$$

On notera  $Z = (q, p) \in \mathbb{R}^n$ , où  $n = 2N$ .

### II.1.2 Le semigroupe et le générateur

Pour fixer les notations, nous rappelons ici quelques résultats généraux sur les semigroupes de diffusion (cf. [RY05] par exemple).

#### Le semigroupe

Soit le semigroupe  $(P_t)_{t \geq 0}$  de la diffusion  $(Z_t)_{t \geq 0}$ , i.e. pour toute fonction mesurable positive  $\phi$ , pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ ,

$$P_t \phi(z) = \mathbf{E}_z [\phi(Z_t)].$$

Nous considérons le noyau associé au semigroupe défini via l'action

$$P_t \phi(z) = \int \phi(y) P_t(z, dy).$$

Lorsque la fonction  $\phi$  est une fonction indicatrice, nous noterons pour tout ensemble borélien  $A$ ,

$$P_t(z, A) = P_t \mathbb{1}_A(z).$$

Les résultats dont nous aurons besoin par la suite utilisent les propriétés de régularité des semigroupes.



**Définition II.1 (Fortement fellerien).** Un semigroupe  $(P_t)_{t \geq 0}$  est dit *fortement fellerien* si pour toute fonction mesurable bornée  $f$  et tout  $t > 0$ , la fonction  $z \mapsto P_t f(z)$  est continue.

L'adjoint formel du semigroupe  $(P_t)_{t \geq 0}$  agit sur l'espace des mesures de probabilité via la formule suivante. Soient  $\mu$  une mesure de probabilité,  $A$  un ensemble borélien,

$$P_t^* \mu(A) = \int P_t(z, A) \mu(dz).$$

**Définition II.2 (Mesure invariante).** Une mesure  $\mu$  est dite *invariante* pour la diffusion si pour tout réel strictement positif  $t$ ,

$$P_t^* \mu = \mu.$$

*Le générateur*

Nous noterons  $\mathcal{L}$  le générateur de la diffusion  $(Z_t)_{t \geq 0}$  et  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$  son domaine. Rappelons que la diffusion stochastique (II.1) a pour générateur l'opérateur différentiel du second ordre

$$\mathcal{L}f = \{H, f\} - \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} p_i \partial_{p_i} f + \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} T_i \partial_{p_i}^2 f, \quad \forall f \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, \quad (\text{II.2})$$

où  $\{H, f\}$  désigne le crochet de Poisson de  $H$  et  $f$ , c'est-à-dire,

$$\{H, f\} = \sum_{i \in \mathcal{V}} \partial_{p_i} H \partial_{q_i} f - \partial_{q_i} H \partial_{p_i} f.$$

Nous considérerons l'adjoint formel  $\mathcal{L}^*$  du générateur  $\mathcal{L}$  défini pour toute fonction  $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}$  par

$$\mathcal{L}^* f = -\{H, f\} + \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} (f + p_i \partial_{p_i} f) + \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} T_i \partial_{p_i}^2 f. \quad (\text{II.3})$$

*Les équations de Fokker-Planck*

Semigroupe et générateur sont reliés via l'équation de Fokker-Planck. Pour toute fonction  $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ ,

$$\partial_t P_t f = \mathcal{L} P_t f = P_t \mathcal{L} f. \quad (\text{II.4})$$

### II.1.3 La non-explosion de la diffusion

Pour montrer que la diffusion est bien définie, nous utilisons la caractérisation suivante.

**Définition II.3 (Fonction de Lyapunov).** Une fonction  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  est appelée *fonction de Lyapunov* si

1. pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $W(z) \geq 1$ ,

## II.1. Introduction

---

2.  $W$  est confinante, i.e.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} W(z) = +\infty.$$

**Théorème II.1 (Non-explosion, cf. [RB06] Theorem 5.9 ou [MT93] Theorem 2.1).** *S'il existe une fonction de Lyapunov  $W$  de classe  $C^\infty$  et une constante  $C > 0$  telles que*

$$\mathcal{L}W \leq CW,$$

*alors la diffusion est définie pour tout temps  $t \geq 0$  et satisfait*

$$P_t W(z) \leq W(z) e^{ct}.$$

*De plus, le domaine  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$  contient toutes les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  dominées par  $W$ .*

*Remarque.* Comme une fonction de Lyapunov est toujours supérieure à 1, il suffit de vérifier que  $\mathcal{L}W \leq c$ .

**Corollaire II.1.1.** *La diffusion associée aux réseaux conducteurs de chaleur définie par l'équation (II.1) est bien définie.*

*Démonstration.* On remarque que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}H &= \{H, H\} - \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} p_i \partial_{p_i} H + \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} \partial_{p_i}^2 H \\ &= \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} (T_i - p_i^2) \\ &\leq \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} T_i. \end{aligned}$$

La remarque et le théorème II.1 précédents nous permettent donc de conclure.  $\square$

### II.1.4 Les mesures invariantes

*Un moyen pratique*

En utilisant les définitions précédentes, nous obtenons la proposition suivante.

**Proposition II.1.2.** *Une mesure  $\mu$  est invariante pour le semigroupe  $(P_t)$  si et seulement si*

$$\mathcal{L}^* \mu = 0.$$

Cette propriété est très utile pour prouver l'existence de mesures invariantes explicites pour les diffusions hamiltoniennes, comme le montre l'exemple suivant.

À température constante

**Théorème II.2.** Soit  $T > 0$ . Lorsque toutes les températures sont égales,  $T_i = T$ ,  $\forall i \in \partial\mathcal{V}$ , la mesure de Gibbs

$$\mu_H(dz) = \frac{e^{-\beta H}}{Z} dz$$

est invariante, où  $\beta = 1/T$  et  $Z = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\beta H} dz$  est la constante de normalisation.

*Démonstration.* Il s'agit d'un simple calcul. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}^* e^{-\beta H}}{e^{-\beta H}} &= \beta \{H, H\} + \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} (1 - \beta p_i \partial_{p_i} H) + \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} T (\beta^2 (\partial_{p_i} H)^2 - \beta) \\ &= 0 + \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} (1 - \beta p_i^2 + \beta p_i^2 - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

*Remarques.*

- On constate que la mesure ainsi définie est à densité  $C^\infty$  par rapport à la mesure de Lebesgue.
- La présence du potentiel d'accrochage dans l'expression de l'hamiltonien assure que, pour des potentiels polynomiaux par exemple, la mesure de Gibbs est bien définie.

*Les résultats précédemment obtenus*

Les principaux résultats obtenus à ce jour concernent les chaînes d'oscillateurs. Dans ce modèle, la relation d'équivalence  $\sim$  s'écrit simplement  $i \sim j$  si et seulement si  $j = i \pm 1$ . Les thermostats sont alors disposés à chacune des extrémités de la chaîne. Dès l'article fondateur [EPRB99a], les auteurs ont montré l'existence d'une mesure invariante mais avec des hypothèses relativement fortes de croissance quadratique des potentiels : l'existence découle de propriétés de compacité (nous verrons par la suite, dans le cadre des potentiels harmoniques, comment obtenir l'existence de la mesure invariante via un théorème de point fixe), l'unicité est obtenue par perturbation à partir du cas où les températures sont constantes. Cette dernière hypothèse est supprimée dans [EPRB99b]. Les méthodes utilisées alors sont relativement proches de celles que nous présentons dans cette thèse. Les auteurs montrent la régularité du semigroupe via l'hypoellipticité puis son irréductibilité forte via la contrôlabilité. Le contrôle est montré par propagation le long de la chaîne. Nous ne pourrions utiliser une telle méthode dans le cas d'un graphe général. J.-P. Eckmann et M. Hairer [EH00] généralisent les résultats précédents en supprimant l'hypothèse de croissance quadratique des potentiels. Ils sont alors contraints de supposer que le potentiel de couplage est plus fort que le potentiel d'accrochage. Enfin, L. Rey-Bellet et L. Thomas [RBT02] ont proposé une version simplifiée de ces preuves et ont montré que la convergence vers la mesure invariante a lieu à une vitesse

exponentielle. Ces résultats ont été utilisés par Ph. Carmona [Car07] pour des variations autour du modèle initial proposées par C. Bernardin et S. Olla [BO05] d’une part, et R. Lefevere et A. Schrenkel [LS04] d’autre part.

Récemment, M. Hairer et J. Mattingly [HM07] ont montré qu’une convergence exponentielle ne pourra pas avoir lieu dans le cas où le potentiel d’accrochage est plus fort que le potentiel d’interaction. D’autre part, ils ont obtenu l’existence de la mesure invariante dans le cas d’une chaîne à 3 oscillateurs.

Les réseaux d’oscillateurs ont été introduits par [MNV03] puis évoqués dans [RB03]. Dans ce cadre, les auteurs proposent une hypothèse qui relie potentiel d’interaction et géométrie du graphe pour montrer l’unicité de la mesure invariante. Nous verrons que, dans le cadre de réseaux harmoniques, leur hypothèse est trop forte. Un des objectifs de cette généralisation aux réseaux est de comprendre quels sont les critères qui régissent l’existence et l’unicité des mesures invariantes.

### II.1.5 Plan du chapitre

Nous commencerons par présenter le cadre des réseaux harmoniques. Même si ces réseaux ont déjà été étudiés (voir par exemple [EZ04]), nous proposons une nouvelle méthode pour montrer l’existence d’une mesure invariante utilisant la complétude des espaces de Wasserstein. Cette méthode présente l’avantage d’être intuitive car elle utilise la contraction du flot hamiltonien. Nous n’avons cependant pas pu l’étendre à des potentiels anharmoniques. Nous proposons également une condition nécessaire et suffisante d’existence et d’unicité de la mesure invariante, répondant ainsi à une question posée par L. Rey-Bellet [RB03]. Cette méthode permet d’exhiber une quantité invariante par le flot hamiltonien. Toutes ces conditions s’expriment en termes purement algébriques et seront reliées à une condition géométrique de disposition des thermostats dans le graphe.

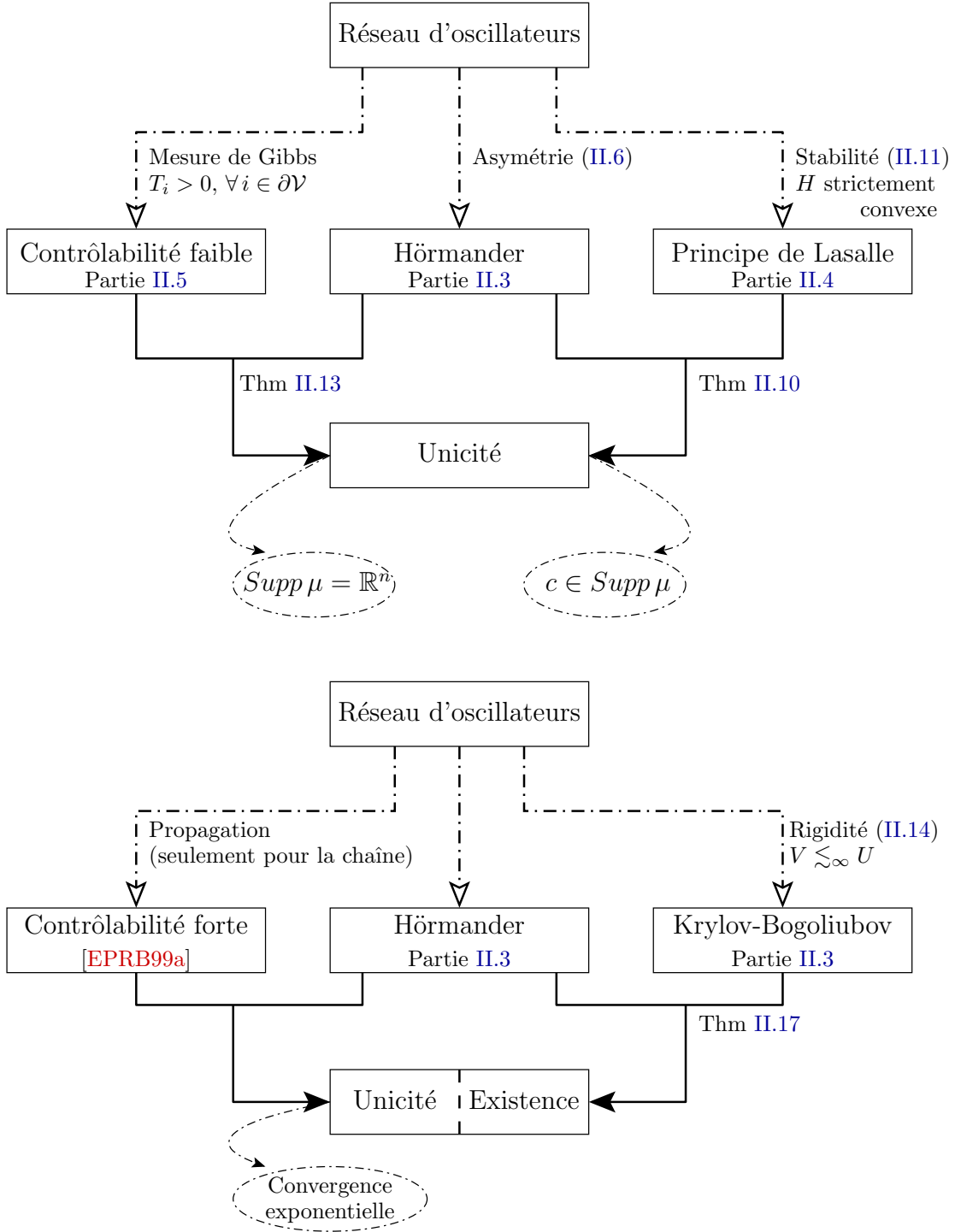
Ensuite, nous généraliserons partiellement ces résultats au cadre des potentiels anharmoniques. Nous discuterons ainsi dans un premier temps la régularité du semigroupe via la condition de Hörmander. Nous montrerons que lorsque les températures sont toutes égales, cette condition implique l’unicité de la mesure invariante. Nous nous limiterons cependant au cadre des potentiels analytiques et ne pourrions atteindre les potentiels localement constants envisagés par [BRO07]. Nous verrons comment traduire cette condition en termes algébriques.

Dans la partie II.4, une méthode dynamique de la preuve de l’unicité des mesures invariantes reposant sur le principe de Lasalle sera présentée. Nous verrons que cette méthode nécessite l’utilisation d’une hypothèse de rigidité supplémentaire, mais qui n’est pas très contraignante. En effet, nous en aurons besoin dans la partie concernant l’existence des mesures invariantes. Le problème de l’unicité de la mesure invariante sous la condition de Hörmander sera ensuite étudié dans la partie II.5 via la démarche proposée par M. Hairer [Hai05] et utilise les notions de contrôlabilité. Nous détaillerons cette démarche en précisant les preuves de certains théorèmes, montrant en particulier la récurrence de certaines diffusions.

Enfin, nous généraliserons brièvement la méthode d’existence d’une mesure inva-

riante proposée par L. Rey-Bellet et L. Thomas [RBT02] grâce à l’hypothèse de rigidité évoquée précédemment. Cependant, nous ne pourrions pas montrer la compacité de la résolvante dans un espace  $L^2$  pondéré et nous n’obtenons donc pas de convergence exponentielle vers la mesure invariante comme dans [EH00], [EPRB99a]. Nous montrerons également que, comme l’ont obtenu M. Hairer et J. Mattingly [HM07], nous ne pouvons pas espérer obtenir une convergence exponentielle vers la mesure invariante lorsque le potentiel d’accrochage est plus fort que le potentiel d’interaction.

## Résumé schématique des résultats de ce chapitre



## II.2 Les oscillateurs harmoniques

Dans cette partie, nous décrivons le comportement des oscillateurs harmoniques, ce qui signifie que nous supposons les potentiels  $U$  et  $V$  harmoniques,  $U(x) = V(x) = \frac{x^2}{2}$ . Nous déduisons une condition nécessaire et suffisante pour que le réseau ait une unique mesure invariante. Cette condition s'exprime en fonction de la géométrie du réseau. Pour plus d'informations sur les flux thermiques dans le cadre des oscillateurs harmoniques, il faut se référer à l'article de J.-P. Eckmann et E. Zabey [EZ04].

**Théorème II.3.** *Lorsque les potentiels sont harmoniques, il existe une unique mesure invariante si et seulement si le graphe  $(\mathcal{V}, \sim, \partial\mathcal{V})$  satisfait la condition (II.6) d'asymétrie.*

Nous commençons par décrire la condition d'asymétrie avec des exemples. L'existence d'une unique mesure invariante sous la condition d'asymétrie sera montrée (cf. partie II.2.2) en utilisant un théorème de point fixe. Nous montrerons l'unicité sous la condition d'asymétrie dans la partie II.2.2 en construisant un contre-exemple.

### II.2.1 L'asymétrie

Dans toute la suite, on notera  $(e_i)_{i \in \mathcal{V}}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . On définit  $\Lambda$  la matrice d'adjacence du graphe, i.e. pour tous  $i, j \in \mathcal{V}$ ,  $(\Lambda)_{ij} = \delta_{i \sim j}$ . Pour tout atome  $i \in \mathcal{V}$ , on note  $d_i$  son nombre de voisins et on considère la matrice

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N).$$

On notera  $\Delta$  le Laplacien associé au graphe  $G$ , i.e.

$$\Delta = D - \Lambda. \tag{II.5}$$

**Exemple II.1.** Dans le cadre du diamant de la figure II.1, nous avons

$$D = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Condition (Condition d'asymétrie).** On dit qu'un graphe muni d'un bord  $G = (\mathcal{V}, \sim, \partial\mathcal{V})$  satisfait la *condition d'asymétrie* si

$$E_{\Delta, \partial\mathcal{V}} := \text{Vect} \left\{ \Delta^k e_i, k \in \mathbb{N}, i \in \partial\mathcal{V} \right\} = \mathbb{R}^N. \tag{II.6}$$

*Remarque.*  $E_{\Delta, \partial\mathcal{V}}$  est le plus grand espace vectoriel contenant les  $(e_i, i \in \partial\mathcal{V})$  stable par  $\Delta$ .

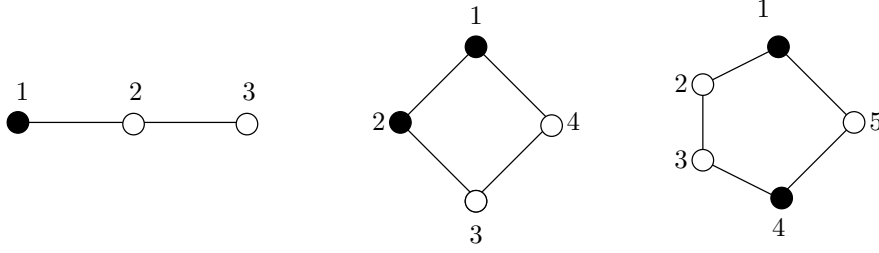


FIG. II.2 – Exemples de graphes satisfaisant la condition d’asymétrie (en noir les atomes reliés à des thermostats)

### Les premiers exemples de graphes asymétriques

On remarque que les graphes de la figure II.2 satisfont la condition (II.6) d’asymétrie. En particulier, pour qu’une chaîne satisfasse cette condition, il suffit qu’une de ses extrémités soit reliée à un thermostat.

Un exemple de graphe ne satisfaisant pas la condition (II.6) d’asymétrie est le diamant proposé dans la figure II.1.

Pour simplifier la vérification de la condition (II.6) d’asymétrie, on aimerait supprimer la matrice des degrés dans son expression. Cependant, comme le montrent les remarques suivantes, ceci n’est pas possible en général.

**Proposition II.2.1.** *Si le graphe est régulier (i.e. tout atome a le même nombre de voisins), alors  $E_{\Delta, \partial\mathcal{V}} = E_{\Lambda, \partial\mathcal{V}}$ .*

*Démonstration.* Lorsque le graphe est régulier (i.e. tous les atomes ont le même nombre  $d$  de voisins), la matrice  $D$  est une homothétie et on a alors

$$E_{\Delta, \partial\mathcal{V}} = \text{Vect} \left\{ \Lambda^k e_i, k \in \mathbb{N}, i \in \partial\mathcal{V} \right\} =: E_{\Lambda, \partial\mathcal{V}}.$$

En effet, on remarque que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta^k e_i &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} d^j \Lambda^{k-j} e_i \\ \Lambda^k e_i &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} d^j \Delta^{k-j} e_i \end{aligned}$$

□

*Remarque.* Les matrices  $D$  et  $\Lambda$  commutent si et seulement si le graphe est régulier. En effet, on remarque que  $(D\Lambda)_{ij} = d_i \mathbb{1}_{i \sim j}$  et  $(\Lambda D)_{ij} = d_j \mathbb{1}_{i \sim j}$ .



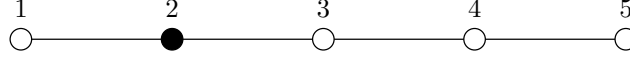


FIG. II.3 – Chaîne à 5 atomes

**Exemple II.2.** Les réseaux suivants montrent que la proposition est généralement fausse lorsque le graphe n'est pas régulier.

Dans le cadre d'une chaîne à 5 éléments dont le thermostat est situé sur l'atome 2 (cf. figure II.3), on obtient

$$\begin{aligned} E_{\Delta,2} &= \mathbb{R}^5, \\ E_{\Lambda,2} &= \text{Vect}\{e_2, e_4, e_1 + e_3, e_3 + e_5\}. \end{aligned}$$

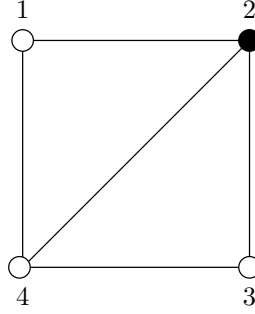


FIG. II.4 – Réseau à 4 atomes

Dans le cas d'un carré muni d'une de ses diagonales dont le thermostat est situé sur l'atome 2 (cf. figure II.4), on obtient

$$\begin{aligned} E_{\Delta,2} &= \text{Vect}\{e_2, e_1 + e_3 + e_4\}, \\ E_{\Lambda,2} &= \text{Vect}\{e_2, e_4, e_1 + e_3\}. \end{aligned}$$

### Le cercle

Considérons le cas où les atomes sont disposés circulairement (cf. figure II.5) et étudions la condition sur la position des thermostats pour que la condition (II.6) d'asymétrie soit satisfaite. Cet exemple permettra de traiter le cas simple où un cycle est présent au milieu d'une chaîne (cf. [LL07]).

**Proposition II.2.2.** *Lorsque des thermostats sont placés en position  $(k_i)_{i \in \partial \mathcal{V}}$  sur un réseau circulaire de  $N$  oscillateurs, la condition (II.6) d'asymétrie est satisfaite si et seulement si le groupe engendré par les  $(k_i - k_j)_{i,j \in \partial \mathcal{V}}$  est  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ .*

On remarque que ce graphe est régulier (tout atome possède 2 voisins). La condition d'asymétrie s'écrit ainsi  $E_{\Lambda, \partial \mathcal{V}} = \mathbb{R}^N$ . Numérotions les atomes  $\{1, \dots, N\}$  dans le sens

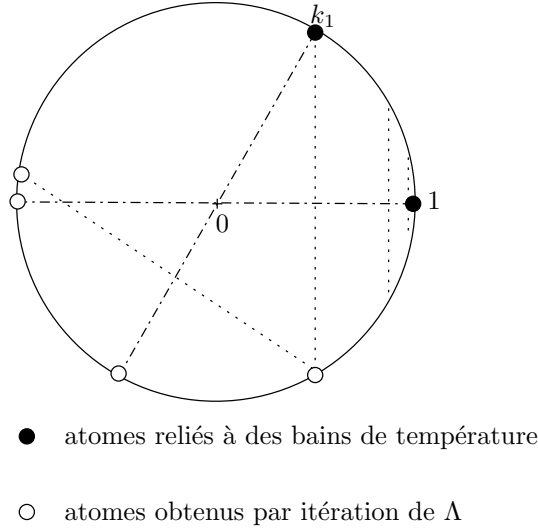


FIG. II.5 – La condition d’asymétrie sur un réseau circulaire d’oscillateurs

trigonométrique. Pour simplifier les notations, notons  $e^{\frac{2i(k-1)}{N}\pi}$  l’affixe de l’atome  $k$ . Nous dirons indifféremment que  $e_k$ ,  $k$  ou  $e^{\frac{2i(k-1)}{N}\pi}$  est dans  $E_{\Lambda, \partial \mathcal{V}}$ .

*Démonstration.* Supposons qu’il y ait un unique thermostat disposé sur l’atome 1. L’application successive de la matrice  $\Lambda$  permet d’obtenir,

- $\Lambda e_1 = e_N + e_2 \in E_{\Lambda, \partial \mathcal{V}}$ ,
- $\Lambda^2 e_1 = e_1 + e_{N-1} + e_1 + e_3$ , soit  $e_{N-1} + e_3 \in E_{\Lambda, \partial \mathcal{V}}$ ,
- $\Lambda(e_{N-1} + e_3) = e_N + e_{N-2} + e_2 + e_4$ , soit  $e_{N-2} + e_4 \in E_{\Lambda, \partial \mathcal{V}}$ ,
- ...
- $e_{N-i} + e_{2+i} \in E_{\Lambda, \partial \mathcal{V}}$  et  $e_{N/2+1} \in E_{\Lambda, \partial \mathcal{V}}$  si  $N$  est pair.

Ainsi, la présence d’un seul thermostat ne suffit pas à rendre le graphe asymétrique.

Supposons qu’il y ait un deuxième thermostat et notons  $k_1$  sa position. La présence d’un thermostat en 1 et d’un thermostat en  $e^{\frac{2i(k_1-1)}{N}\pi}$  assure que le symétrique de  $e^{\frac{2i(k_1-1)}{N}\pi}$  par rapport à la droite passant par 0 et 1 est également dans l’espace vectoriel (cf. figure II.5). Or, ce point a pour affixe  $e^{\frac{-2i(k_1-1)}{N}\pi}$ . Puis, l’image de ce point par la symétrie d’axe passant par 0 et  $e^{\frac{2i(k_1-1)}{N}\pi}$  est également dans  $E_{\Lambda, \partial \mathcal{V}}$ . Ce point a pour affixe  $e^{2\frac{2i(k_1-1)}{N}\pi}$ . On obtient ainsi par récurrence, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $e^{k\frac{2i(k_1-1)}{N}\pi}$  appartient à l’espace.

Finalement, en présence de deux thermostats, la condition d’asymétrie est satisfaite si le groupe engendré par  $(k_1 - 1)$  engendre  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ .

En présence de plusieurs thermostats numérotés  $k_1, \dots, k_r$ , on montre de même que la condition d’asymétrie est satisfaite si et seulement si

$$\langle k_i - k_j, i, j \in \{1, \dots, r\} \rangle = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

□

### *L'ordre d'un graphe*

Dans [MNV03], les auteurs s'intéressent à l'ordre d'un graphe. On dit que  $\omega$  est l'ordre du graphe à bord  $(G, \partial\mathcal{V})$  si c'est le plus petit entier tel qu'il existe une suite  $(v_1, \dots, v_r)$  satisfaisant

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \partial\mathcal{V} \sqcup \{v_1, \dots, v_r\} \\ v_1 &\sim^{n_1} \partial\mathcal{V}, n_1 \leq \omega \\ v_2 &\sim^{n_2} \partial\mathcal{V} \cup \{v_1\}, n_2 \leq \omega \\ &\vdots \\ v_r &\sim^{n_r} \partial\mathcal{V} \cup \{v_1, \dots, v_{r-1}\}, n_r \leq \omega \end{aligned}$$

où  $i \sim^n A$  signifie que  $i \notin A$  et qu'il existe  $j \in A$  qui soit relié à  $i$  et à  $n - 1$  autres atomes en dehors de  $A$ .

**Exemple II.3.** Le cycle à 5 atomes présenté précédemment figure II.2 est d'ordre 2.

Dans le cas où les potentiels sont harmoniques, [MNV03] suggère que la mesure invariante du système sera unique si le graphe est d'ordre 1. On montrera par la suite que lorsque les potentiels sont harmoniques, la condition d'asymétrie est équivalente à l'unicité de la mesure invariante (cf. théorème II.3). Comme le montre la chaîne à 5 atomes, la condition proposée par [MNV03] est donc trop forte.

### *Une propriété de projection*

Dans la suite de ces notes, on note  $I_\partial$  la matrice du projecteur sur l'espace vectoriel engendré par les  $(e_i, i \in \partial\mathcal{V})$ . D'un point de vue matriciel, pour tout  $i, j \in \mathcal{V}$ ,  $(I_\partial)_{ij} = \delta_{ij} \mathbb{1}_{i \in \partial\mathcal{V}}$ .

*Remarque.* On notera dans la suite de ces notes  $\Gamma = I + \Delta$ . On remarque que  $E_{\Gamma, \partial\mathcal{V}} = E_{\Delta, \partial\mathcal{V}}$ .

**Lemme II.2.3 (Projection).** *Si le graphe satisfait la condition (II.6) d'asymétrie et  $q \in \mathbb{R}^N$  est tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $I_\partial(I + \Delta)^k q = 0$ , alors  $q = 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $v \in E_{\Delta, \partial\mathcal{V}}$ . Par définition, il existe des réels  $\lambda_{ik}$  tels que  $v = \sum_{i \in \partial\mathcal{V}, k} \lambda_{ik} \Gamma^k e_i$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle q, v \rangle &= \langle q, \sum_{i \in \partial\mathcal{V}, k} \lambda_{ik} \Gamma^k e_i \rangle \\ &= \sum_{i \in \partial\mathcal{V}, k} \lambda_{ik} \langle \Gamma^k q, e_i \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $q \in E_{\Delta, \partial \mathcal{V}}^\perp$ . Lorsque la condition d'asymétrie est satisfaite,  $E_{\Delta, \partial \mathcal{V}} = \mathbb{R}^N$  et  $E_{\Delta, \partial \mathcal{V}}^\perp = \{0\}$ , soit  $q = 0$ .  $\square$

*Remarque.* Réciproquement, si  $E_{\Delta, \partial \mathcal{V}} \neq \mathbb{R}^N$ , il existe un vecteur *non nul*  $q \in E_{\Delta, \partial \mathcal{V}}^\perp$  et la propriété précédente est fausse.

*À propos de valeurs propres*

Pour des raisons de stabilité d'équations différentielles, on s'intéresse aux valeurs propres de la matrice  $\Gamma$ . Le premier lemme rappelle que les valeurs propres du laplacien sont réelles positives, le deuxième sera utilisé pour montrer la stabilité d'équations différentielles linéaires.

**Lemme II.2.4.** *La matrice  $\Gamma$  a toutes ses valeurs propres positives.*

*Démonstration.* Soit  $q \in \mathbb{R}^N$ . On remarque que

$$\begin{aligned} \langle \Gamma q, q \rangle &= \sum_i \left( (1 + d(i))q_i^2 - \sum_{j \sim i} q_i q_j \right) \\ &= \sum_i q_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \sim i} (q_i^2 - 2q_i q_j + q_j^2) \\ &= \sum_i q_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \sim i} (q_i - q_j)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$\square$

**Lemme II.2.5 (Stabilité).** *Lorsque le graphe satisfait la condition (II.6) d'asymétrie, les valeurs propres de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Gamma & -I_\partial \end{pmatrix}$$

*sont de partie réelle strictement négative.*

*Démonstration.* Soit  $(q, p) \neq 0$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ . On vérifie que ce couple de valeurs satisfait l'équation

$$\begin{cases} p &= \lambda q \\ -\Gamma q - I_\partial p &= \lambda p. \end{cases}$$

En remplaçant  $p$  par  $\lambda q$  puis en effectuant le produit scalaire avec  $q$ , on obtient

$$\lambda^2 \|q\|^2 + \lambda \|I_\partial q\|^2 + \langle \Gamma q, q \rangle = 0.$$

Ainsi, en utilisant les relations coefficients/racines, les valeurs propres  $\lambda$  sont soit de même signe (négatif), soit complexes conjuguées (de partie réelle strictement négative). La partie réelle des valeurs propres est nulle si et seulement si

$$\|I_{\partial}q\| = 0,$$

soit en projetant la première équation  $I_{\partial}p = 0$ , puis en projetant la deuxième,  $I_{\partial}\Gamma q = 0$ . On peut alors multiplier la première équation par  $\Gamma$  pour en déduire que  $I_{\partial}\Gamma p = 0$ , puis multiplier la seconde par  $\Gamma$  pour en déduire que  $I_{\partial}\Gamma^2 p = 0$ , puis par récurrence pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $I_{\partial}\Gamma^k q = I_{\partial}\Gamma^k p = 0$ .

Ainsi, d'après le lemme II.2.3 de projection,  $q = 0$  et  $p = 0$ , ce qui est impossible!  $\square$

## II.2.2 La complétude et l'existence de mesures invariantes

Dans le cadre harmonique, on prouve l'existence d'une mesure de probabilité invariante via un théorème de point fixe. La convergence vers cette mesure est alors exponentielle.

*Quelques rappels sur les espaces de Wasserstein*

Soient  $(X, d)$  un espace métrique séparable complet,  $\mathcal{P}$  l'ensemble des mesures de probabilité sur les boréliens de  $X$ . On définit pour tout couple de mesures  $\mu, \nu$ , la quantité

$$W(\mu, \nu) = \inf_{G \in \mathcal{C}(\mu, \nu)} \int \int d(x, y) G(dx, dy), \quad (\text{II.7})$$

où  $\mathcal{C}(\mu, \nu)$  désigne l'ensemble des couplages de  $(\mu, \nu)$ , i.e. l'ensemble des mesures de probabilité sur  $X \times X$  ayant pour marginales  $\mu$  et  $\nu$ .

$W$  définit une distance sur l'ensemble  $\mathcal{P}_1$  des mesures de probabilité telles que pour un  $x_0 \in X$  (et donc pour tous),  $W(\delta_{x_0}, \mu) < +\infty$ .

On rappelle le théorème suivant.

**Théorème (cf. [Bol07], par exemple).** *L'espace  $(\mathcal{P}_1, W)$  est complet.*

Dans la suite de ces notes, nous noterons abusivement  $d(\mu, \nu) = W(\mu, \nu)$ .

*La contraction du flot et la démonstration du théorème II.3*

Rappelons que pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $(Z_t^z)_{t \geq 0}$  désigne le processus issu de  $z$ , solution de l'équation différentielle stochastique II.1.

**Théorème II.4.** *Lorsque les potentiels  $U, V$  sont harmoniques et le graphe satisfait la condition (II.6) d'asymétrie, il existe  $\mu_0, c > 0$  tels que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0$ ,*

$$\|Z_t^x - Z_t^y\| \leq ce^{-\mu_0 t} \|x - y\|,$$

où nous avons noté  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration du théorème II.3.* Soit  $t > 0$ .

On établit tout d'abord le résultat de contraction pour des mesures ponctuelles. En effet, en utilisant le couplage trivial  $G$  qui utilise le même mouvement brownien pour des solutions partant de  $x$  et  $y$ , on obtient la majoration

$$\begin{aligned} \|P_t^* \delta_x - P_t^* \delta_y\| &= \inf_{G \in \mathcal{C}(P_t^* \delta_x, P_t^* \delta_y)} \int \int \|u - v\| G(du, dv) \\ &\leq \int \int \|u - v\| P_t(x, du) \otimes P_t(y, dv) \\ &= \mathbf{E} \|Z_t^x - Z_t^y\| \\ &\leq ce^{-\mu_0 t} \|x - y\|, \end{aligned}$$

d'après le théorème II.4 de contraction du flot précédent.

On utilise ensuite l'argument classique qui consiste à contrôler la distance entre deux mesures quelconques en fonction de la distance entre les masses de Dirac. Soient  $\mu, \nu$  deux mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}^n$ . Notons  $Q \in \mathcal{C}(\mu, \nu)$  qui minimise la distance de Wasserstein entre  $\mu$  et  $\nu$ ,

$$\begin{aligned} \|P_t^* \mu - P_t^* \nu\| &\leq \int \|P_t^* \delta_x - P_t^* \delta_y\| Q(dx, dy) \\ &\leq e^{-\mu_0 t} \int \|x - y\| Q(dx, dy) \\ &= e^{-\mu_0 t} \|\mu - \nu\|. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un réel  $\alpha \in (0, 1)$  tel que

$$\|P_t^* \mu - P_t^* \nu\| \leq \alpha \|\mu - \nu\|.$$

L'application  $\mu \mapsto P_t^* \mu$  est donc contractante sur un espace complet. Le théorème de point fixe assure donc qu'il existe une unique mesure  $\mu$  telle que

$$P_t^* \mu = \mu.$$

De plus, pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P_{t+s}^* \mu &= P_t^* P_s^* \mu \\ &= P_s^* P_t^* \mu \\ &= P_s^* \mu, \end{aligned}$$

Ainsi,  $P_s^* \mu$  est une mesure  $P_t$ -invariante. Comme  $P_t$  admet une unique mesure invariante, on obtient

$$P_s^* \mu = \mu, \forall s \geq 0.$$

□

*L'asymétrie et la démonstration du théorème II.4*

On note  $DZ_t^z$  la différentielle du flot stochastique par rapport à la condition initiale  $z$ .

**Lemme II.2.6.** *Si la condition (II.6) d'asymétrie est satisfaite, il existe  $\mu_0 > 0$  tel que pour tous  $t > 0$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\|DZ_t^z\| \leq e^{-\mu_0 t}.$$

*Remarque.* La démonstration suivante utilise la différentielle du flot alors que, dans le cadre de cette partie, l'harmonicité des potentiels permet d'utiliser la linéarité du flot. Cependant, nous avons gardé cette version plus lourde dans l'espoir de généraliser ces résultats à des versions où la régularité serait asymptotique (cf. proposition II.3.4).

*Démonstration du théorème II.4.* Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Notons  $\gamma_s = sx + (1-s)y$ . On remarque que pour tout  $t > 0$ ,  $Z_t^{\gamma_s}$  est un chemin qui relie  $Z_t^x$  à  $Z_t^y$ . Ainsi, en utilisant le théorème fondamental du calcul différentiel,

$$\begin{aligned} \|Z_t^x - Z_t^y\| &\leq \int_0^1 \|DZ_t^{\gamma_s} \dot{\gamma}_s\| ds \\ &\leq \int_0^1 e^{-\mu_0 t} \|\dot{\gamma}_s\| ds \\ &= e^{-\mu_0 t} \|x - y\|. \end{aligned}$$

□

On conclut cette partie en démontrant le lemme II.2.6.

*Démonstration du lemme II.2.6.* Notons  $J_t = DZ_t^x$ .

Formellement on intervertit les signes différentielles et dérivée au sens d'Itô et  $J_t$  satisfait l'équation différentielle stochastique (cf [Bas98] p.30),

$$\begin{cases} dJ_t &= M(Z_t^x) J_t dt \\ J_0 &= Id, \end{cases}$$

où  $M(Z_t^x)$  est la matrice définie par

$$M(Z_t^x) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -Hess E(Z_t^x) & -I_{\partial\mathcal{V}} \end{pmatrix},$$

où  $E(q, p) = \sum_{i \in \mathcal{V}} V(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{j \sim i} U(q_i - q_j)$  désigne l'énergie potentielle du système,  $Hess E$  la hessienne de l'énergie potentielle.

Comme les potentiels sont harmoniques, la hessienne est une fonction constante et il suffit donc d'étudier les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Gamma & -I_{\partial\mathcal{V}} \end{pmatrix}.$$

Finalement, le lemme II.2.4 assure que les valeurs propres de cette matrice sont de partie réelle strictement négative. On obtient ainsi la démonstration du lemme II.2.6.

□

### II.2.3 La non-unicité

Dans le cadre harmonique, lorsque les températures sont toutes égales, la condition d'asymétrie est nécessaire pour prouver l'unicité des mesures invariantes, comme le montre la proposition suivante.

**Théorème II.5 (Non-unicité).** *On suppose ici que les potentiels  $U$  et  $V$  sont harmoniques et que les températures  $T_i$  sont identiques égales à  $T$ . Si le graphe ne satisfait pas la condition (II.6) d'asymétrie, alors il existe une infinité de mesures invariantes.*

Ce théorème est une conséquence directe du lemme suivant.

**Lemme II.2.7.** *Sous les hypothèse du théorème II.5, il existe une quantité invariante  $K$  par le flot hamiltonien qui ne dépend pas des oscillateurs du bord du réseau.*

*Démonstration du théorème II.5.* Notons  $\beta = 1/T$  l'inverse de la température. En utilisant le lemme II.2.7 précédent, il existe une fonction  $K$  telle que pour tout réel  $\gamma > 0$ ,  $\mu_{\beta,\gamma}$  soit invariante, où

$$\mu_{\beta,\gamma}(dz) = e^{-\beta H(z) - \gamma K(z)} / Z \, dz,$$

$Z = Z(\beta, \gamma)$  étant la constante de normalisation. □

*Démonstration du lemme II.2.7.* On décompose l'adjoint formel de l'opérateur  $\mathcal{L}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}^* e^f}{e^f} &= -\{H, f\} + \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} \{1 + p_i \partial_{p_i} f + T (\partial_{p_i}^2 f + (\partial_{p_i} f)^2)\} \\ &=: -\{H, f\} + \mathcal{L}_T f. \end{aligned}$$

On cherche  $K$  sous une forme quadratique

$$K(q, p) = \alpha \langle z, q \rangle^2 + \langle z, p \rangle^2,$$

où  $\langle z, q \rangle = \sum_{i=1}^N z_i q_i$  désigne le produit scalaire usuel,  $\alpha$  est un réel et  $z$  un vecteur. On cherche à déterminer  $\alpha, z$  tels que  $K$  ne dépende pas des  $(p_i, i \in \partial \mathcal{V})$  pour avoir  $\mathcal{L}_T K = 0$  et telle que  $\{H, K\} = 0$ .

Un simple calcul permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \{H, K\} &= \sum_i \partial_{p_i} H \partial_{q_i} K - \partial_{q_i} H \partial_{p_i} K \\ &= \sum_i p_i \partial_{q_i} K - \partial_{p_i} K \left( q_i + \sum_{j \sim i} (q_i - q_j) \right) \\ &= \sum_i p_i 2z_i \alpha \langle z, q \rangle - 2z_i \langle z, p \rangle (\Gamma q)_i \\ &= 2\alpha \langle z, q \rangle \langle z, p \rangle - 2 \langle z, p \rangle \langle z, \Gamma q \rangle, \end{aligned}$$



Comme  $\Gamma$  est symétrique, nous avons

$$\{H, K\} = 2\langle z, p \rangle \langle \alpha z - \Gamma z, q \rangle.$$

Comme le graphe ne satisfait pas la condition (II.6) d'asymétrie,  $\dim(E_{\Delta, \partial\mathcal{V}}^\perp) \geq 1$  et  $\Gamma$  a un vecteur propre  $z \in E_{\Delta, \partial\mathcal{V}}^\perp$  de valeur propre  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$\Gamma z = \alpha z.$$

Alors,  $z \in \text{Vect}\{e_i, i \in \partial\mathcal{V}\}^\perp$ , et  $K(q, p)$  ne dépend pas des variables  $p_i, i \in \partial\mathcal{V}$ .  $\square$

*Remarque.* Supposons que, lorsque les températures sont distinctes, il existe une mesure invariante  $\mu$ . On montre de manière analogue que si le graphe ne satisfait pas la condition (II.6) d'asymétrie, alors pour tout  $\gamma > 0$ , les mesures  $e^{-\gamma K} \mu / Z$  sont invariantes. La mesure invariante n'est donc pas unique.

**Exemple II.4.** Dans le cadre du diamant représenté figure II.1, on retrouve le contre-exemple obtenu dans [MNV03]. En effet, le vecteur  $(0, 1, 0, -1)$  est un vecteur propre de  $\Gamma$  associé à la valeur propre 3. Ainsi, la quantité

$$K(q, p) = 3 \frac{(p_2 - p_4)^2}{2} + \frac{(q_2 - q_4)^2}{2}$$

est invariante par le flot hamiltonien et indépendante des valeurs de  $(q_1, q_3, p_1, p_3)$ .

## II.3 La régularité et l'unicité de la mesure invariante

Dans cette partie, nous étudions la régularité du semigroupe. Dans un premier temps, nous expliquons comment la condition de Hörmander permet de montrer la régularité du semigroupe de la diffusion. Nous reprenons ensuite la démarche de M. Hairer [Hai05] pour montrer que sous la condition de Hörmander, lorsque les températures sont constantes, la mesure invariante est unique. Finalement, nous montrerons comment vérifier la condition de Hörmander en pratique à l'aide de considérations géométriques sur la disposition des thermostats dans le graphe.

Le théorème principal de cette partie est le suivant dont on rappellera les grandes lignes de la démonstration.

**Théorème II.6 (Support plein, cf. [Hai05] Corollary 3.4).** *Supposons que la condition (II.9) de Hörmander est satisfaite. Si le semigroupe possède une mesure invariante de support plein  $\mu_H$ , alors  $\mu_H$  est l'unique mesure invariante. De plus, cette mesure est ergodique.*

### II.3.1 L'hypoellipticité, Hörmander et la régularité

Dans cette partie, nous nous intéressons à la régularité du semigroupe de la diffusion. Rappelons (cf. Définition II.1) que le semigroupe est fortement fellerien dès que pour tout  $t > 0$  et toute fonction borélienne bornée  $f$ ,  $z \mapsto P_t f(z)$  est continue. Pour montrer la continuité du semigroupe, on utilise les notions d'algèbre de Lie et d'hypoellipticité.

**Définition II.4 (Hypoellipticité, cf. [Hör83] p. 110).** Un opérateur  $\mathcal{L}$  est dit *hypoelliptique* si pour toute distribution  $v$ ,

$$\text{sing supp } v = \text{sing supp } P v,$$

où le support singulier de  $v$  est le complémentaire de l'ensemble des points  $z \in \mathbb{R}^n$  tels que pour tout ouvert  $A \ni z$ ,  $v$  restreinte à  $A$  est de classe  $C^\infty$ .

En particulier, on remarque que lorsque  $\mathcal{L}$  est hypoelliptique toute solution de  $\mathcal{L}v = 0$  est de classe  $C^\infty$ .

#### *Hörmander et les algèbres de Lie*

Dans toute la suite, nous noterons pour une constante  $c \in \mathbb{R}$  et des champs de vecteurs  $(X_i)_{0 \leq i \leq r}$ ,

$$\mathcal{L} = c + X_0 + \sum_{i=1}^r X_i^2. \quad (\text{II.8})$$

**Définition II.5 (Algèbre de Lie).** L'algèbre de Lie  $\mathfrak{L}_0$  générée par les champs de vecteurs  $(X_i, 0 \leq i \leq r)$  est la plus petite algèbre contenant  $(X_i, 0 \leq i \leq r)$  stable par crochet de Lie.

En particulier, pour tout point  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathfrak{L}_0(z)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à  $\mathbb{R}^n$ .

On rappelle que le crochet de Lie  $[\cdot, \cdot]$  entre deux champs de vecteurs  $X, Y$  de  $\mathbb{R}^n$  est défini par

$$[X, Y] = XY - YX.$$

**Condition (Condition de Hörmander).** On dit que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{L}$  satisfait la condition de Hörmander si pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , sa dimension vaut  $n$ ,

$$\dim \mathfrak{L}(z) = n, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{II.9})$$

On rappelle le théorème fondamental suivant.

**Théorème II.7 (cf. [Hör85] Theorem 22.2.1. p. 353).** Soit  $(X_i, 0 \leq i \leq r)$  une famille de champs de vecteurs,  $c \in \mathbb{R}$ . Si l'opérateur  $c + X_0 + \sum_{i=1}^r X_i^2$  satisfait la condition (II.9) de Hörmander, alors il est hypoelliptique.

Nous utiliserons par la suite l'algèbre de Lie  $\mathfrak{L}(z)$  générée par les champs de vecteurs  $(X_i, 1 \leq i \leq r)$  stable par crochet de Lie interne ainsi que par crochet de Lie avec  $X_0$ . Nous dirons que le générateur  $\mathcal{L}$  satisfait la condition de Hörmander si l'algèbre de Lie  $\mathfrak{L}_0$  satisfait la condition (II.9) de Hörmander.

*Remarque.* On utilisera la notation  $X \sim Y$  lorsqu'il existe  $Z \in \mathfrak{L}(z)$  tel que  $X = Y + Z$ . Dans le cadre des réseaux conducteurs de chaleur,  $X_0 f = \{H, f\} - \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} \partial_{p_i}$  et pour  $i > 1$ ,  $X_i = T_i \mathbb{1}_{i \in \partial \mathcal{V}} \partial_{p_i}$ . Ainsi, pour étudier l'algèbre de Lie, nous considérerons  $X_0 f \sim \{H, f\}$ .

*Hörmander et la régularité*

**Proposition II.3.1.** *Si le générateur  $\mathcal{L}$  de la diffusion satisfait, pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dim \mathfrak{L}(z) = n$ , le semigroupe  $(P_t)$  est fortement fellerien et la mesure invariante (si elle existe) est à densité  $C^\infty$  par rapport à la mesure de Lebesgue.*

*Démonstration.* • On rappelle que pour toute fonction  $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ ,

$$\partial_t \int f(y) P_t(x, dy) = \int \mathcal{L}f(y) P_t(x, dy),$$

soit  $(\partial_t - \mathcal{L}^*) P_t(x, \cdot) = 0$ . Ainsi, si  $\partial_t - \mathcal{L}^*$  est hypoelliptique, le semigroupe admet une densité  $p_t(x, y)$  par rapport à la mesure de Lebesgue, et

$$(t, y) \mapsto p_t(x, y) \text{ est de classe } C^\infty.$$

- On remarque alors que

$$\partial_t \int f(y) p_t(x, y) dy = \int f(y) \mathcal{L} p_t(x, y) dy,$$

soit  $(\partial_t - \mathcal{L}) p_t(\cdot, y) = 0$ . Ainsi, si  $\partial_t - \mathcal{L}$  est hypoelliptique,

$$(t, x) \mapsto p_t(x, y) \text{ est de classe } C^\infty.$$

- Comme pour toute mesure invariante  $\mu$ ,

$$\mathcal{L}^* \mu = 0,$$

dès que  $\mathcal{L}^*$  est hypoelliptique,  $\mu$  admet une densité de classe  $C^\infty$  par rapport à la mesure de Lebesgue.

En particulier, en utilisant le théorème précédent, dès que  $\dim \mathfrak{L}(z) = n$ , on a  $\dim \mathfrak{L}^*(z) = n$  et ainsi, sous les hypothèses du théorème  $\mathcal{L}^*$  est hypoelliptique.

De même, en notant  $\mathfrak{L}_t$  l'algèbre de Lie associée à  $\partial_t - \mathcal{L}$ , dès que  $\dim \mathfrak{L}(z) = n$ ,  $X_0 \in \mathfrak{L}(z) \subset \mathfrak{L}_t(z)$  et ainsi, comme  $\partial_t - X_0 \in \mathfrak{L}_t(z)$ , on a bien  $(\partial_t - \mathcal{L})$  et  $(\partial_t - \mathcal{L}^*)$  hypoelliptiques.  $\square$

*La régularité sans Hörmander : asymptotiquement fortement fellerien*

Lorsque les potentiels ne sont pas polynomiaux, on pourrait utiliser la notion d'asymptotiquement fortement fellerien présentée dans ce paragraphe. Cependant, cette condition n'est pas facile à vérifier en pratique.

Les semigroupes asymptotiquement fortement felleriens ont été introduits pas M. Hairer et J. Mattingly [HM06] pour étudier l'équation de Navier-Stokes stochastique. Cette propriété est intimement liée au comportement des systèmes dynamiques.

**Définition II.6 (Asymptotiquement fortement fellerien, cf. [HM06] Définition 3.8).** Un semigroupe markovien  $(P_t)_t$  est dit *asymptotiquement fortement fellerien* en  $z$  s'il existe un système de pseudométriques  $(d_n)_n$  totalement séparant et une suite  $(t_n)$  croissante positive telle que

$$\inf_{\gamma \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathcal{B}(z, \gamma)} \|P_{t_n}(z, \cdot) - P_{t_n}(y, \cdot)\|_{d_n} = 0,$$

où un système totalement séparant est tel que pour tous  $x \neq y$ ,  $d_n(x, y) \uparrow 1$ .

Nous rappelons ici la caractérisation pratique donnée par M. Hairer et J. Mattingly.

**Proposition II.3.2 (cf. [HM06] Proposition 3.11).** *Supposons qu'il existe deux suites  $(t_n)_n$  et  $(\delta_n)_n$  telles que  $(t_n)$  soit croissante et  $\delta_n \rightarrow 0$ . Si pour toute fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  satisfaisant  $\|\phi\|_\infty$  et  $\|\nabla \phi\|_\infty$  finis,*

$$|\nabla P_{t_n} \phi(z)| \leq C(\|z\|) (\|\phi\|_\infty + \delta_n \|\nabla \phi\|_\infty),$$

*pour une fonction croissante  $C$ , alors le semigroupe est asymptotiquement fortement fellerien.*

Pour avoir une caractérisation plus pratique, considérons le semigroupe associé à l'équation différentielle générique

$$dZ_t = f(Z_t) dt + \sigma dB_t.$$

Pour toute fonction  $v$  de l'espace de Cameron-Martin, soit  $\rho_t$  la solution du système différentiel

$$\partial_t \rho_t = Df(Z_t^x) \rho_t - \sigma v_t.$$

**Proposition II.3.3 (cf. [HM06]).** *S'il existe une fonction  $v$  dans l'espace de Cameron-Martin telle que*

$$\mathbf{E}_z \left[ \left| \int_0^t v(s) dB_s \right| \right] < +\infty; \quad \mathbf{E}_z \|\rho_t\| \rightarrow 0,$$

*alors le semigroupe  $(P_t)$  est asymptotiquement fortement fellerien en  $z$ .*

Dans les lignes qui suivent, nous utilisons la proposition précédente pour montrer, lorsque les potentiels sont harmoniques, qu'un semigroupe satisfaisant la condition (II.6) d'asymétrie est asymptotiquement fortement fellerien. Ceci n'est pas surprenant car la condition (II.9) de Hörmander assure qu'il est fortement fellerien (cf. partie II.3.3). Cependant, nous pensons que cette propriété pourrait être étendue à un cadre plus général.

Pour le problème des réseaux conducteurs de chaleur avec des potentiels harmoniques,  $\rho_t$  est solution du système différentiel

$$\begin{cases} \partial_t \rho_i &= \rho_{i+N} \\ \partial_t \rho_{i+N} &= - \left( 1 + \sum_{j \sim i} 1 \right) \rho_i + \Lambda \rho_i - \rho_{i+N} \mathbb{1}_{i \in \partial \mathcal{V}} - \sigma_j v_j \mathbb{1}_{i \in \partial \mathcal{V}} \end{cases}$$

**Proposition II.3.4.** *Lorsque  $v \equiv 0$ , nous avons,*

$$\|\rho_t\|_\infty \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* On remarque que  $\rho_t$  est solution de l'équation différentielle

$$\dot{\rho}_t = M\rho_t,$$

où  $M$  est définie dans le lemme II.2.5. Ainsi, d'après ce même lemme II.2.5, lorsque la condition (II.6) d'asymétrie est satisfaite, les valeurs propres de  $M$  sont à partie réelle strictement négative et  $\rho_t$  converge exponentiellement vite vers 0.  $\square$

*Remarque.* Nous remarquons qu'ici nous avons utilisé le bruit trivial  $v \equiv 0$ . Ceci signifie qu'une petite perturbation de la position initiale tend à disparaître.

### II.3.2 Le support, la régularité et l'unicité

On développe dans cette partie la démonstration du théorème II.6. On remarque que l'hypoellipticité sera utilisée pour montrer que le semigroupe est fortement fellerien et pour utiliser la densité de la mesure invariante par rapport à la mesure de Lebesgue.

Nous rappelons ici les résultats présentés par G. Da Prato [DP06] et J. Zabczyk [DPZ96].

**Proposition II.3.5 (Enveloppe convexe, cf. [DPZ96] Proposition 3.2.7 p.29).** *L'ensemble des mesures invariantes par rapport à un semigroupe stochastiquement continu est l'enveloppe convexe de l'ensemble des mesures invariantes ergodiques.*

**Définition II.7 (Support de mesures).** Pour toute mesure  $\mu$ , le *support* de  $\mu$  est l'ensemble

$$\text{Supp } \mu = \{z \in \mathbb{R}^n; \forall \varepsilon > 0, \mu(\mathcal{B}(z, \varepsilon)) > 0\}.$$

*Remarque.* Le support d'une mesure est un ensemble fermé.

Pour prouver le théorème II.6, nous allons découper  $\mathbb{R}^n$  selon les supports des mesures ergodiques. Nous remarquons tout d'abord que ces supports sont disjoints et d'intérieur non vide.

**Proposition II.3.6 (cf. [DP06], Proposition 7.8 p.97).** *Soient  $\mu, \nu$  deux mesures ergodiques distinctes invariantes par rapport à un même semigroupe fortement fellerien. Alors les supports de ces mesures sont disjoints, i.e.*

$$\text{Supp } \mu \cap \text{Supp } \nu = \emptyset.$$

**Lemme II.3.7.** *Supposons que l'adjoint  $\mathcal{L}^*$  du générateur de la diffusion soit hypoelliptique. Alors, pour toute mesure invariante  $\mu$ ,*

$$\overset{\circ}{\text{Supp}} \mu \neq \emptyset.$$

*Démonstration.* Soit  $\mu$  une mesure invariante. On rappelle que d'après la proposition II.3.1,  $\mu$  a une densité  $\rho_\mu$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\text{Supp } \mu = \overline{\{\rho_\mu > 0\}}.$$

Donc, comme  $\mu \neq 0$ , il existe  $x_0 \in \text{Supp } \mu$  tel que  $\rho(x_0) > 0$ . Comme  $\rho$  est une fonction continue,  $\rho$  est strictement positive sur un voisinage de  $x_0$  et le lemme est démontré.  $\square$

**Proposition II.3.8.** *On suppose les hypothèses du théorème II.6 satisfaites. Il existe une famille de mesures de probabilité ergodiques invariantes  $(\mu_i)$ , indexée sur un ensemble dénombrable  $D$  telle que*

$$\overline{\bigsqcup_{i \in D} \text{Supp } \mu_i} = \mathbb{R}^n.$$

*Démonstration.* On s'intéresse dans un premier temps aux mesures ergodiques invariantes. Le lemme II.3.7 précédent assure qu'il existe un ouvert dans tout support d'une mesure invariante. De plus, la proposition II.3.6 assure que les supports sont disjoints. Ainsi, on peut associer à chacune des mesures invariantes ergodiques des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  deux à deux disjoints. L'ensemble des mesures ergodiques invariantes est donc au plus dénombrable. Nous le noterons  $(\mu_i)_{i \in \tilde{D}}$ , où  $\tilde{D}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ .

Comme  $\mu_H$  est une mesure invariante, en utilisant le théorème de Choquet (cf. [Phe66] p.19), elle s'exprime comme la combinaison convexe de mesures invariantes ergodiques. Il existe une famille de nombres réels strictement positifs  $(p_i)_{i \in D}$  (avec  $D \subset \tilde{D}$ ) telle que  $\sum_i p_i = 1$  et

$$\mu_H = \sum_{i \in D} p_i \mu_i.$$

Ainsi,

$$\text{Supp } \mu_H = \mathbb{R}^n = \overline{\bigsqcup_{i \in D} \text{Supp } \mu_i}.$$

$\square$

On utilise ensuite la régularité pour montrer le théorème II.8 suivant :

**Théorème II.8.** *On suppose les hypothèses du théorème II.6 satisfaites. Soit  $D$  un ensemble dénombrable et  $(\mu_i)_{i \in D}$  une famille de mesures ergodiques invariantes distinctes. Si*

$$\overline{\bigsqcup_{i \in D} \text{Supp } \mu_i} = \mathbb{R}^n,$$

*alors  $D$  est restreint à un singleton.*

On rappelle la définition de la *norme en variation totale* : pour toute mesure de probabilité  $\mu$ ,

$$\|\mu\|_{TV} = \frac{1}{2} \sup_{A \text{ mesurable}} |\mu(A)|.$$

**Lemme II.3.9 (Continuité, cf. [Hai07] Theorem 6.6).** *Comme le semigroupe est fortement fellerien, la fonction*

$$z \mapsto P_t(z, \cdot)$$

*est continue par rapport à la norme en variation totale.*

**Lemme II.3.10 (cf. [HM06] Theorem 3.16).** *On suppose qu'il existe  $\varepsilon > 0$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  tels que*

$$\sup_{x,y \in U} \|P_t^* \delta_x - P_t^* \delta_y\|_{TV} \leq \varepsilon.$$

*Alors, pour tout couple de mesures  $\mu_1, \mu_2$  telles que  $\mu_i(U) \geq \alpha$ ,*

$$\|P_t^* \mu_1 - P_t^* \mu_2\|_{TV} \leq 1 - \alpha(1 - \varepsilon).$$

*Démonstration.* Notons  $\mu_i^U$  la mesure de probabilité extraite de  $\mu_i$  vérifiant  $\mu_i^U(U) = 1$ . On décompose alors

$$\mu_i = \alpha \mu_i^U + (1 - \alpha) \bar{\mu}_i.$$

On utilise la définition de la norme de Wasserstein,

$$\begin{aligned} \|P_t^* \mu_1^U - P_t^* \mu_2^U\|_{TV} &\leq \int_{U \times U} \|P_t^* \delta_x - P_t^* \delta_y\|_{TV} \mu_1^U(dx) \mu_2^U(dy) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \|P_t^* \mu_1 - P_t^* \mu_2\|_{TV} &\leq (1 - \alpha) \|P_t^* \bar{\mu}_1 - P_t^* \bar{\mu}_2\|_{TV} + \alpha \|P_t^* \mu_1^U - P_t^* \mu_2^U\|_{TV} \\ &\leq (1 - \alpha) + \alpha \varepsilon. \end{aligned}$$

□

*Remarque.* La proposition II.3.6 qui assure que les mesures ergodiques invariantes distinctes sont à support disjoint est une conséquence directe du lemme II.3.10 précédent.

**Proposition II.3.11.** *Soit  $(P_t)$  un semigroupe fortement fellerien. Pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $\delta_z > 0$  tel que au plus une mesure invariante ergodique  $\mu_z$  satisfait*

$$\text{Supp } \mu_z \cap \mathcal{B}(z, \delta_z) \neq \emptyset.$$

*Démonstration.* Soit  $z \in \mathbb{R}^n$ . D'après le lemme II.3.9 de continuité, il existe  $\delta_z > 0$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$  tels que

$$\sup_{x,y \in \mathcal{B}(z, \delta_z)} \|P_t^* \delta_x - P_t^* \delta_y\|_{TV} \leq \varepsilon.$$

Supposons qu'il existe deux mesures ergodiques invariantes distinctes  $\mu_1, \mu_2$  telles que

$$\text{Supp } \mu_1 \cap \mathcal{B}(z, \delta_z) \neq \emptyset, \text{ Supp } \mu_2 \cap \mathcal{B}(z, \delta_z) \neq \emptyset.$$

Alors, il existe  $\alpha \in (0, 1)$  tel que pour tout  $i = 1, 2$ ,

$$\mu_i(\mathcal{B}(z, \delta_z)) \geq \alpha.$$

D'après le lemme II.3.10 précédent, on obtient alors

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} < 1.$$

Or, deux mesures ergodiques invariantes disjointes sont étrangères et satisfont donc

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} = 1.$$

On obtient ainsi une contradiction.  $\square$

*Démonstration du théorème II.8.* On raisonne par l'absurde en supposant que  $D$  contient au moins deux éléments. Soit  $R > 0$ ,  $\mathcal{B}_R$  la boule de  $\mathbb{R}^n$  centrée en 0 de rayon  $R$ . D'après le lemme précédent, pour tout  $z \in \mathcal{B}_R$ , il existe un réel  $\delta_z > 0$  tel que le support d'au plus une mesure invariante intersecte  $\mathcal{B}(z, \delta_z)$ . Or,  $\cup_{z \in \mathcal{B}_R} \mathcal{B}(z, \delta_z)$  recouvre  $\mathcal{B}_R$ . Donc, par compacité, on peut extraire un recouvrement fini

$$\mathcal{B}_R \subset \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}(z_i, \delta_{z_i}).$$

Ainsi, il existe un nombre fini de mesures ergodiques invariantes telles que

$$\mathcal{B}_R = \bigsqcup_{i=1}^r (\text{Supp } \mu_i \cap \mathcal{B}_R).$$

Or, par définition,  $\text{Supp } \mu_i \cap \mathcal{B}_R$  est un fermé non vide. Comme la boule  $\mathcal{B}_R$  est connexe, on obtient  $r = 1$ .

En supposant maintenant qu'il existe deux mesures ergodiques invariantes et en prenant  $R$  assez grand, on obtient une contradiction.  $\square$

Nous avons maintenant tous les éléments pour prouver le théorème II.6.

*Démonstration du théorème II.6 d'unicité.* On déduit de la proposition II.3.8 que  $\mu_H = \sum_{i \in D} p_i \mu_i$  et ainsi

$$\overline{\bigsqcup_{i \in D} \text{Supp } \mu_i} = \mathbb{R}^n.$$

Donc, d'après le théorème II.8,  $D$  est réduit à un singleton noté  $\{i_0\}$ . Ainsi,  $\mu_H = \mu_{i_0}$  est une mesure ergodique. Comme son support est plein et que deux mesures invariantes distinctes ont des supports disjoints,  $\mu_H$  est l'unique mesure ergodique invariante.  $\square$

**Corollaire II.3.12.** *Lorsque les températures sont toutes égales et que la condition (II.9) est satisfaite, la mesure de Gibbs est l'unique mesure invariante du système différentiel stochastique.*



### II.3.3 Hörmander en pratique

Même si la question des mesures invariantes pour des oscillateurs harmoniques a été entièrement traité dans la partie II.2, nous commençons par présenter ici le lien entre la condition (II.9) de Hörmander et la condition (II.6) d'asymétrie.

*Les oscillateurs harmoniques*

Dans ce paragraphe, les potentiels  $U$  et  $V$  sont harmoniques, i.e.  $U(x) = V(x) = \frac{x^2}{2}$ .

**Proposition II.3.13.** *Lorsque les oscillateurs sont harmoniques, la condition (II.9) de Hörmander est équivalente à la condition (II.6) d'asymétrie.*

On rappelle que pour tout  $i \in \mathcal{V}$ , on note  $d_i$  le degré (i.e. le nombre de voisins) de l'atome  $i$ ,  $D = \text{diag}(d_i)$  et  $\Lambda$  la matrice d'adjacence. On considère  $\Delta = D - \Lambda$  le laplacien sur le graphe.

**Lemme II.3.14.** *Soient  $A$  une matrice à coefficients constants,  $z \in \mathbb{R}^n$  et  $i \in \mathcal{V}$  tels que  $A\partial_{p_i} \in \mathfrak{L}(z)$ . Alors,*

$$A\partial_{q_i} \in \mathfrak{L}(z).$$

*Démonstration.* Rappelons que nous avons défini, pour toute fonction  $f$  de classe  $C^1$ ,

$$X_0 f = \{H, f\} = \sum_{i \in \mathcal{V}} \partial_{p_i} H \partial_{q_i} f - \partial_{q_i} H \partial_{p_i} f.$$

Il suffit alors de remarquer que

$$[X_0, A\partial_{p_i}] = A\partial_{q_i}.$$

□

**Lemme II.3.15.** *Soit  $A$  une matrice à coefficients constants,  $i \in \mathcal{V}$ . Alors,*

$$A\partial_{q_i} \in \mathfrak{L} \Rightarrow (I + \Delta)A\partial_{q_i} \in \mathfrak{L}.$$

*Démonstration.* Notons  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  les coefficients de la matrice  $A$ . Le crochet de  $A\partial_{q_i}$

avec  $X_0$  nous donne,

$$\begin{aligned}
 [X_0, A\partial_{q_i}] &= \left[ X_0, \sum_j a_{ji} \partial_{q_j} \right] \\
 &= \sum_j a_{ji} V''(q_j) \partial_{p_j} + \\
 &\quad + \sum_j a_{ji} \sum_{k \sim j} U''(q_j - q_k) \partial_{p_j} - \sum_j a_{ji} \sum_{k \sim j} U''(q_k - q_j) \partial_{p_k} \\
 &= \sum_j a_{ji} \left\{ \left( 1 + \sum_{k \sim j} 1 \right) \partial_{p_j} - \sum_{k \sim j} \partial_{p_k} \right\} \\
 &= \sum_j a_{ji} (I + \Delta) \partial_{p_j} \\
 &= (I + \Delta) A \partial_{p_i}.
 \end{aligned}$$

□

**Corollaire II.3.16.** *Pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , on peut décrire l'algèbre de Lie associée au générateur,*

$$\mathfrak{L}(z) = \text{Vect} \left\{ \Delta^k \partial_{q_i}, \Delta^k \partial_{p_i} \mid i \in \partial \mathcal{V}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

*Démonstration de la Proposition II.3.13.* La proposition II.3.13 est une conséquence directe du Corollaire précédent. □

*Un exemple*

Avant de donner une méthode algébrique permettant de vérifier la condition (II.9) de Hörmander lorsque les potentiels sont anharmoniques, nous étudions l'exemple suivant. Pour simplifier les notations, nous supposons ici que  $U(x) = x^4$  et  $V(x) = x^2$ . Nous étudions le réseau décrit dans la figure II.6.

- $[X_0, \partial_{p_1}] = -\partial_{q_1}$ , donc  $\partial_{q_1} \in \mathfrak{L}$ .
- On effectue le crochet de  $X_0$  avec  $\partial_{q_1}$ ,

$$\begin{aligned}
 [X_0, \partial_{q_1}] &= \sum_{i \in \mathcal{V}} \partial_{q_i q_1}^2 H \partial_{p_i} \\
 &= V''(q_1) \partial_{p_1} + U''(q_1 - q_3) \partial_{p_1} + U''(q_1 - q_4) \partial_{p_1} - \cdots \\
 &\quad \cdots - U''(q_3 - q_1) \partial_{p_3} - U''(q_4 - q_1) \partial_{p_4}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$U''(q_1 - q_3) \partial_{p_3} + U''(q_1 - q_4) \partial_{p_4} \in \mathfrak{L}(z).$$

- En effectuant le crochet de la quantité précédente avec  $\partial_{q_1}$ , on obtient

$$U'''(q_1 - q_3) \partial_{p_3} + U'''(q_1 - q_4) \partial_{p_4} \in \mathfrak{L}(z),$$

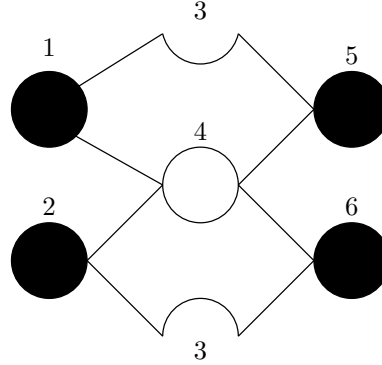


FIG. II.6 – Exemple de réseau ne satisfaisant pas la condition (II.9) de Hörmander en tout point

puis de manière similaire,  $U^{(4)}(q_1 - q_3)\partial_{p_3} + U^{(4)}(q_1 - q_4)\partial_{p_4} \in \mathfrak{L}(z)$ , soit

$$\partial_{p_3} + \partial_{p_4} \in \mathfrak{L}(z).$$

On distingue alors les cas suivants.

- Si  $q_1 \neq q_3$  et  $q_1 \neq q_4$ , les propriétés des déterminants de Vandermonde permettent de conclure que

$$\dim \mathfrak{L}(z) = n.$$

- Si  $q_1 = q_3$  et  $q_1 \neq q_4$ , alors  $\partial_{p_4} \in \mathfrak{L}(z)$ , puis le dernier crochet fournit  $\partial_{p_3} \in \mathfrak{L}(z)$ , soit

$$\dim \mathfrak{L}(z) = n.$$

*Remarque.* On pourrait effectuer les mêmes raisonnements en considérant les atomes 2, 5 ou 6.

- Si  $q_1 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = q$ , on obtient seulement  $\partial_{p_3} + \partial_{p_4} \in \mathfrak{L}(z)$ . Alors, un simple crochet avec  $X_0$  permet d'obtenir

$$\partial_{q_3} + \partial_{q_4} \in \mathfrak{L}(z),$$

puis

$$V''(q)\partial_{p_3} + V''(q)\partial_{p_4} \in \mathfrak{L},$$

ce qui ne fournit pas d'information supplémentaire. Finalement,

$$\dim \mathfrak{L}(z) = n - 2.$$

Ainsi, la diffusion considérée ne satisfait pas la condition (II.9) de Hörmander.

*Les oscillateurs anharmoniques*

Dans toute la suite, on note  $u = \deg(U)$ ,  $v = \deg(V)$ . On suppose que  $U$  est un monôme, i.e.  $U(q) = q^u$  et que  $u > v$ , i.e. l'interaction est plus forte que l'accrochage. On cherche une condition algébrique simple à vérifier permettant de montrer la condition (II.9) de Hörmander en tout point de  $\mathbb{R}^n$ . Nous allons commencer par exhiber une condition suffisante pour que la condition (II.9) de Hörmander soit satisfaite, puis nous verrons pour quel type de graphes elle est nécessaire.

Pour tout  $i \in \partial\mathcal{V}$ , la définition II.5 de l'algèbre de Lie assure que  $\partial_{p_i} \in \mathfrak{L}$ . On va étudier récursivement l'espace vectoriel engendré par  $\partial_{p_i}$  stable par crochets avec  $X_0$ . On notera  $Z_i^1, \dots, Z_i^m$  la suite de ces algèbres. Plus précisément,

$$\begin{aligned} Z_i^0 &= \text{Vect}\{\partial_{p_i}\}, \\ Z_i^1 &= \text{Vect}\{\partial_{p_i}, [X_0, \partial_{p_i}]\}, \\ Z_i^2 &= \text{Vect}\{Z_i^1, [Y_1, Y_2], Y_1, Y_2 \in Z_i^1 \cup \{X_0\}\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

*Remarque.* On remarque tout d'abord que pour  $i \in \partial\mathcal{V}$ , le lemme II.3.14 précédent permet d'affirmer que  $\partial_{q_i} \in \mathfrak{L}(z)$ .

**Condition suffisante**

**Théorème II.9.** *On considère l'espace vectoriel  $\mathcal{E}$  engendré par  $\partial_{p_i}$ ,  $i \in \partial\mathcal{V}$  stable par l'opération*

$$\sum_j a_j \partial_{p_j} \in \mathcal{E} \Rightarrow \sum_j \sum_k \Lambda_{jk} (a_j - a_k)^{u-1} \partial_{p_j} \in \mathcal{E}.$$

*Si  $\dim \mathcal{E} = N$ , alors la condition (II.9) de Hörmander est satisfaite en tout point.*

On rappelle la notation, pour  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $z = (q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ . Pour que la condition (II.9) de Hörmander soit vérifiée en tout point, il faut qu'elle soit vérifiée en les points où il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $q_1 = \dots = q_N = q$ .

**Lemme II.3.17.** *En tout point  $z$  tel que  $q_1 = \dots = q_N = q$ ,*

$$\text{Vect}\{\partial_{p_i}, \partial_{q_i}, \Lambda \partial_{p_i}\} = Z_i^2(z).$$

*Démonstration.* Pour démontrer ce lemme, nous allons itérer le crochet entre  $\partial_{q_i}$  et  $X_0$ . En effet,

$$\begin{aligned} [X_0, \partial_{q_i}] &= \partial_{q_i} \sum_j \partial_{q_j} H \partial_{p_j} \\ &= V''(q_i) \partial_{p_i} + \sum_{j \sim i} U''(q_i - q_j) \partial_{p_i} - \sum_{j \sim i} U''(q_i - q_j) \partial_{p_j}. \end{aligned}$$

Ainsi, comme  $\partial_{p_i} \in \mathfrak{L}(z)$ ,

$$\sum_{j \sim i} U''(q_i - q_j) \partial_{p_j} \in \mathfrak{L}(z).$$

Par une récurrence immédiate, en effectuant les crochets successifs de  $\partial_{q_i}$  avec les quantités obtenues, on a pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\sum_{j \sim i} U^{(m+1)}(q_i - q_j) \partial_{p_j} \in \mathfrak{L}(z).$$

On obtient ainsi, pour  $m = u - 1$ ,

$$\sum_{j \sim i} \partial_{p_j} = \Lambda \partial_{p_i} \in \mathfrak{L}(z).$$

On remarque également que lorsque les  $(q_i)$  sont constants, c'est le seul vecteur non nul obtenu lors des itérations.  $\square$

*Remarque.* Comme précédemment, en tout point où  $q_1 = \dots = q_2 = q$ , on a en utilisant le premier lemme,

$$Z_i^3 = \text{Vect} \{ \partial_{p_i}, \partial_{q_i}, \Delta \partial_{p_i}, \Delta \partial_{q_i} \}.$$

On généralise maintenant ce lemme, le théorème II.9 étant une conséquence immédiate du lemme suivant.

**Lemme II.3.18.** *Soit  $A = (a_j)_{1 \leq j \leq N}$  un vecteur à coefficients constants. On suppose que  $\sum_j a_j \partial_{q_j} \in Z_i^{2p-1}$ . Soit  $z \in \mathbb{R}^n$  tel que  $q_1 = \dots = q_N = q$ . Alors,*

$$\text{Vect} \left\{ Z_i^{2p-1}, \sum_j \sum_{k \sim j} (a_j - a_k)^{u-1} \partial_{p_j}, \sum_j a_j^\ell \partial_{p_j}, \ell < v \right\} = Z_i^{2p}.$$

*Démonstration.* Le premier crochet donne

$$\begin{aligned} \left[ X_0, \sum_j a_j \partial_{q_j} \right] &= \sum_j a_j V''(q_j) \partial_{p_j} + \dots \\ &\quad \dots + \sum_j \sum_{k \sim j} a_j U''(q_j - q_k) \partial_{p_j} - \sum_j \sum_{k \sim j} a_j U''(q_k - q_j) \partial_{p_k}. \end{aligned}$$

Or, comme le polynôme  $U$  est pair, en effectuant le changement  $j \leftrightarrow k$  dans le deuxième terme, puis en utilisant la symétrie de la relation  $\sim$ , on obtient

$$\left[ X_0, \sum_j a_j \partial_{q_j} \right] = \sum_j a_j V''(q_j) \partial_{p_j} + \sum_j \sum_k \Lambda_{jk} (a_j - a_k) U''(q_j - q_k) \partial_{p_j}$$

Le calcul du crochet d'ordre 2 permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \left[ \sum_j a_j \partial_{q_j}, \left[ X_0, \sum_j a_j \partial_{q_j} \right] \right] &= \sum_j a_j^2 V^{(3)}(q_j) \partial_{p_j} \\ &\quad + \sum_j \sum_k \Lambda_{jk} (a_j - a_k)^2 U^{(3)}(q_j - q_k) \partial_{p_j}. \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence, on obtient, pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\sum_j a_j^m V^{(m+1)}(q_j) \partial_{p_j} + \sum_j \sum_k \Lambda_{jk} (a_j - a_k)^m U^{(m+1)}(q_j - q_k) \partial_{p_j}.$$

Soit, pour  $m + 1 = u$ ,

$$\sum_j \sum_k \Lambda_{jk} (a_j - a_k)^{u-1} \partial_{p_j} \in \mathfrak{L}(z).$$

□

*Remarque.* Dès que  $u \neq 2$ , on perd toute linéarité... comme on pouvait s'y attendre.

*Démonstration du théorème II.9.* La condition est bien nécessaire car en tout point  $z \in \mathbb{R}^n$ , pour tout vecteur  $(a_i)_i$ , itérer  $u - 1$  fois le crochet de  $X_0$  et  $\sum_j a_j \partial_{q_j}$  permet d'obtenir le vecteur  $\sum_{j,k} \Lambda_{jk} (a_j - a_k)^{u-1} \partial_{p_j}$ . □

**Exemple II.5.** Le réseau circulaire à 5 atomes de la figure II.2 satisfait la condition (II.9) de Hörmander.

- $\partial_{p_1} \in \mathcal{E}$ , donc  $\partial_{p_1} - \partial_{p_2} + \partial_{p_1} - \partial_{p_5} \in \mathfrak{L}$ . En particulier,

$$\partial_{p_2} + \partial_{p_5} \in \mathfrak{L}.$$

- On obtient alors  $2\partial_{p_5} + 2\partial_{p_2} - \partial_{p_3} \in \mathfrak{L}$ , soit

$$\partial_{p_3} \in \mathfrak{L}.$$

- Par ailleurs, comme l'atome 4 est relié à un thermostat,  $\partial_{p_4} \in \mathfrak{L}$  et ainsi,  $\partial_{p_3} + \partial_{p_5} \in \mathfrak{L}$ .
- Finalement,  $\partial_{p_2}, \partial_{p_5} \in \mathfrak{L}$ .

On a donc bien  $\dim \mathcal{E} = 10$  et la condition (II.9) est satisfaite.

## II.4 L'unicité : le principe de Lasalle

Comme le remarquent K. Ichihara et H. Kunita (cf. [IK74] Remark p.250), la condition (II.9) de Hörmander ne suffit généralement pas pour obtenir l'unicité de la mesure invariante. Dans la partie suivante, nous utiliserons la notion de contrôlabilité pour montrer l'unicité. Dans cette partie, nous présentons une méthode qui, bien que moins puissante, fournit une vision plus dynamique. Pour pouvoir conclure, nous serons contraints d'effectuer une hypothèse de stabilité. Cependant, nous verrons que cette hypothèse est également nécessaire pour prouver l'existence de la mesure invariante lorsque le potentiel d'interaction est plus fort que le potentiel d'accrochage (cf. Partie II.6).

À partir de maintenant, nous allons supposer que l'hamiltonien possède un unique minimiseur  $c$  tel que  $H(c) = 0$  (ce qui est vrai dès que les potentiels  $U$  et  $V$  sont supposés convexes).

**Théorème II.10.** *Si le semigroupe associé à la diffusion est fortement fellerien et le système déterministe satisfait la condition (II.11) de stabilité, alors la mesure invariante (si elle existe) est unique.*

*De plus, en notant  $\mu$  cette mesure invariante,  $c \in \text{Supp } \mu$ .*

*Remarque.* Ce théorème reste valable si une des températures des thermostats est nulle, contrairement au résultat de la partie II.5 suivante utilisant la contrôlabilité.

#### II.4.1 Le théorème du support de Stroock-Varadhan

Pour énoncer le lien fondamental entre le support des semigroupes de diffusions et le système déterministe qui lui est associé, nous considérons le système différentiel stochastique générique,

$$dZ_t = f(Z_t) dt + \sigma(Z_t) \circ dB_t,$$

où  $f, \sigma$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$  et  $\circ$  désigne l'intégrale au sens de Stratonovitch. Nous noterons

$$\mathcal{S}_{t_0, z_0} = \left\{ z_{t_0}; \exists \psi \in \mathcal{C}^-, z_t = z_0 + \int_{t_0}^t f(z_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(z_s) \psi(s) ds \right\},$$

où  $\mathcal{C}^-$  est l'ensemble des fonctions continues par morceaux de  $[0, \infty)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème II.11 (Théorème du support, cf. [SV72] Section 5).** *En utilisant les notations précédentes,*

$$\text{Supp } P_{t_0}(z_0, \cdot) = \overline{\mathcal{S}_{t_0, z_0}}.$$

*Remarque.* Dans le cadre des réseaux conducteurs de chaleur, la matrice  $\sigma$  est une matrice constante. Ainsi, les intégrales au sens d'Itô et de Stratonovitch coïncident.

#### II.4.2 Le principe de Lasalle et l'unicité

L'idée de cette méthode est issue des propriétés de contraction utilisées dans le cours de Saint Flour de J. Mattingly [Mat07] pour prouver l'unicité de la mesure invariante pour l'équation de Navier-Stokes stochastique. Notre objectif est de prouver que le point vers lequel toutes les trajectoires se contractent est dans le support de toute mesure invariante. Alors, en utilisant le fait que les mesures ergodiques distinctes ont des supports disjoints (cf. proposition II.3.6), nous montrerons que cette mesure invariante est unique. La difficulté principale est que nous ne pouvons obtenir une inégalité du type Gronwall pour notre diffusion qui servirait à montrer sa stabilité. C'est pourquoi nous introduisons le principe de Lasalle qui fournit un moyen de contrôle de l'évolution déterministe.

Pour simplifier les notations, nous réordonnons les coordonnées du vecteur  $z$  de manière à séparer en valeur les atomes en contact avec les thermostats. Nous écrivons ainsi, pour  $Y = (p_i, i \in \partial\mathcal{V}) \in \mathbb{R}^{|\partial\mathcal{V}|}$  et  $X = (q_i, i \in \mathcal{V}, p_j, j \notin \partial\mathcal{V}) \in \mathbb{R}^{2N-|\partial\mathcal{V}|}$ ,

$$\begin{cases} dX_t &= f(X_t, Y_t) dt \\ dY_t &= g(X_t) dt - \nabla_y H dt + \sigma dB_t, \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

où  $\sigma = \text{diag}(\sqrt{2T_i})$  et  $\nabla_y H$  est le vecteur colonne constitué des  $(\partial_{p_i} H)_{i \in \partial \mathcal{V}}$ . Plus précisément, pour  $\partial \mathcal{V} = \{N - |\partial \mathcal{V}| + 1, \dots, N\}$ ,

$$f = \begin{pmatrix} \partial_{p_1} H \\ \vdots \\ \partial_{p_N} H \\ -\partial_{q_1} H \\ \vdots \\ -\partial_{q_{N-|\partial \mathcal{V}|}} H \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} -\partial_{q_{N-|\partial \mathcal{V}|+1}} H \\ \vdots \\ -\partial_{q_N} H \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que comme  $\nabla_y H(z) = y$ ,  $|\nabla_y H(z)| = 0$  implique  $y \equiv 0$ .

**Condition (Condition de stabilité).** Nous dirons qu'une solution du système (II.12) satisfait la condition de stabilité si le système

$$\begin{cases} \dot{x}_t &= f(x, y) \\ 0 &= g(x) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

a une unique solution donnée par  $z_t \equiv c$ .

*Remarque.* Dans le cadre des réseaux conducteurs de chaleur, la condition (II.11) de stabilité signifie que lorsque les particules reliées aux thermostats sont fixes, le système peut seulement se retrouver dans son état d'équilibre. Nous verrons ci-dessous dans la partie II.4.2 que lorsque les potentiels sont harmoniques, cette condition est équivalente à la condition (II.6) d'asymétrie. On constate également que cette condition est analogue à la condition (II.14) de rigidité.

#### Le principe de Lasalle

Dans cette partie, nous rappelons le principe de Lasalle. Ce principe est une généralisation de la méthode de Lyapunov. Il est utilisé pour montrer (quand la dérivée de la fonction de Lyapunov n'est pas *définie* négative) que la solution du système différentiel possède un point d'attraction (cf. [Sas99] p. 198).

**Définition II.8 (Ensemble invariant).**  $M \subset \mathbb{R}^n$  est dit *invariant* si toutes les trajectoires issues de  $M$  restent dans  $M$ , i.e. pour tout point de départ  $z_0 \in M$ , pour tout  $t \geq 0$ ,

$$z_t^{z_0} \in M.$$

Nous écrirons dans la suite  $\dot{H}(x_t) = \partial_t H(x_t)$ .

**Théorème II.12 (Principe de Lasalle).** Supposons qu'il existe une fonction  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  de classe  $\mathcal{C}^1$  satisfaisant les conditions suivantes : pour tout  $c > 0$ ,

1.  $\Omega_c = \{z; H(z) \leq c\}$  est bornée,
2.  $\dot{H}|_{\Omega_c} \leq 0$ .



Nous notons

$$S = \left\{ z \in \Omega_c; \dot{H}(z) = 0 \right\},$$

et considérons le plus grand sous-ensemble invariant  $M$  de  $S$ .

Alors, pour tout  $z_0 \in \Omega_c$ ,

$$z_t^{z_0} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} M.$$

*Démonstration.* Soit  $z_0 \in \Omega_c$ . D'après les hypothèses,

$$t \mapsto H(z_t^{z_0})$$

est décroissante et positive, donc convergente. Notons

$$c_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} H(z_t^{z_0}) \text{ et } L = \left\{ z; \exists (t_n)_n, z_{t_n}^{z_0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z \right\}.$$

$L$  est invariant, soit

$$H(z) = c_0 \implies \dot{H}(z) = 0.$$

Ainsi,  $L \subset M$  et la démonstration est terminée.  $\square$

*Remarques.*

- Lorsque  $S$  est réduit à un unique point d'équilibre et  $\Omega_c \uparrow \mathbb{R}$ , ce principe implique que pour tout point de départ, la trajectoire converge vers un unique point d'équilibre.
- Comme la fonction  $\dot{H}$  est négative sur  $\Omega_c$ , toute trajectoire issue de  $\Omega_c$  reste dans  $\Omega_c$ .
- Pour les équations de Navier-Stokes stochastiques étudiées par J. Mattin-gly [Mat07], on peut déterminer la vitesse de décroissance vers le point d'équilibre du système déterministe. Dans le cadre des réseaux conducteurs de chaleur, nous n'avons pu prouver un tel résultat. Nous allons donc utiliser la remarque précédente pour contrôler la dynamique du système.

*L'unicité de la mesure invariante : démonstration du théorème II.10*

Remarquons tout d'abord que comme  $H$  est continue en  $c$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\eta > 0$  tel que

$$K_\eta := \{z; H(z) < \eta\} \subset \mathcal{B}(c, \varepsilon).$$

Pour démontrer le théorème, nous allons utiliser la démarche suivante : d'après le principe de Lasalle, toute solution du système déterministe (II.11) tend vers  $c$ . Donc, elle finit par rencontrer l'ensemble  $K_\eta$ . Dès que le système rencontre  $K_\eta$ , en utilisant le principe de Lasalle, il reste dans  $K_\eta$ . Si nous considérons toutes les solutions issues d'une boule de rayon  $R$ , nous montrons ainsi qu'après un certain temps fini, toutes les trajectoires se trouvent dans  $K_\eta$ . Finalement, en utilisant le théorème II.11 du support de Stroock-Varadhan, nous prouverons l'unicité de la mesure invariante.

Dans le reste de cette partie, nous noterons  $(z_t)$  la solution du système déterministe dans bruit, i.e.  $z_t = (x_t, y_t)$  où

$$\begin{cases} \dot{x}_t &= f(x_t, y_t) \\ \dot{y}_t &= g(x_t) - \nabla_y H \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

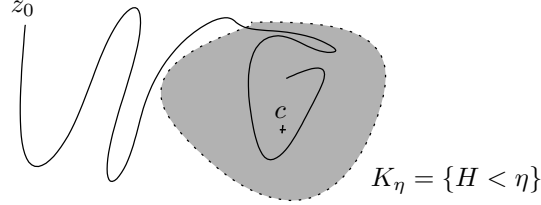


FIG. II.7 – Dynamique du système hamiltonien en l'absence de bruit

Pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , notons  $T_z$  le temps d'atteinte de  $K_\eta$  en partant du point  $z$ , i.e.

$$T_z = \inf \{t \geq 0; z_t^{z_0} \in K_\eta\}.$$

Nous noterons

$$T = \sup_{z \in \mathcal{B}_R} T_z.$$

**Lemme II.4.1.** *En utilisant les notations précédentes, nous avons*

$$T < +\infty.$$

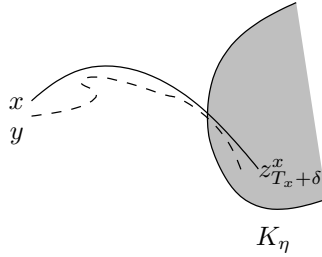


FIG. II.8 – Description du temps d'atteinte déterministe

*Démonstration.* L'idée de la démonstration est décrite dans la figure II.8. Nous montrons une propriété qui ressemble à la semicontinuité supérieure de la fonction  $x \mapsto T_x$ , i.e. il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $y$  dans un voisinage de  $x$ ,

$$T_y \leq T_x + \delta.$$

Nous allons montrer cette propriété par l'absurde. S'il existe une suite  $(x_n)$  telle que  $T_{x_n} \rightarrow +\infty$ , en utilisant la compacité, il existe une sous-suite (toujours notée  $(x_n)$ ) et un point  $x$  tels que

$$x_n \rightarrow x.$$

Supposons  $T_x < +\infty$ . Ainsi il existe  $\delta > 0$  tel que à l'instant  $T_x + \delta$ , le système se trouve à l'intérieur de  $K_\eta$ , i.e.

$$\mathcal{B}(z_{T_x+\delta}^x, \varepsilon) \subset K_\eta.$$

En utilisant la continuité par rapport aux conditions initiales, il existe  $\tilde{\varepsilon} > 0$  tel que pour tout  $y \in \mathcal{B}(x, \tilde{\varepsilon})$ ,

$$|z_{T_x+\delta}^y - z_{T_x+\delta}^x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow z_{T_x+\delta}^y \in K_\eta.$$

Ainsi,  $T_y \leq T_x + \delta$  pour tout  $y \in \mathcal{B}(x, \tilde{\varepsilon})$ . Mais ceci est impossible pour  $y = x_n$  avec  $n$  assez grand.  $\square$

**Proposition II.4.2.** Avec  $T$  et  $K_\eta$  définis précédemment, pour tout  $z \in \mathcal{B}(0, R)$ ,

$$P_T(z, K_\eta) > 0.$$

*Démonstration.* En utilisant le théorème II.11 du support de Stroock-Varadhan avec un contrôle identiquement nul, pour tout  $x \in \mathcal{B}_R$ , en notant  $\widetilde{K}_\eta$  un voisinage de  $K_\eta$  inclus dans  $\mathcal{B}(c, \varepsilon)$ ,

$$P\left(Z_T^z \in \widetilde{K}_\eta\right) = P_T\left(z, \widetilde{K}_\eta\right) > 0.$$

$\square$

*Démonstration du théorème II.10.* Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \partial_t H(z_t) &= \nabla_x H(z_t) \cdot \dot{x}_t + \nabla_y H(z_t) \cdot \dot{y}_t \\ &= \nabla_x H(z_t) \cdot f(z_t) + \nabla_y H(z_t) \cdot g(z_t) - |\nabla_y H(z_t)|^2 \\ &= -|\nabla_y H(z_t)|^2 \\ &= -\sum_{i \in \partial \mathcal{V}} p_i^2. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les hypothèses, nous pouvons appliquer le principe de Lasalle. Soient  $\mu$  une mesure invariante ergodique,  $\varepsilon > 0$ .

- Comme  $\mu$  n'est pas identiquement nulle, il existe une boule  $\mathcal{B}_R$  telle que  $\mu(\mathcal{B}_R) > 0$ .
- En utilisant les définitions précédentes, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $T$  tel que pour tout  $t \geq T$ , pour tout  $z \in \mathcal{B}_R$ ,

$$P_T(z, K_\eta) > 0.$$

- Comme  $H$  est continue, il existe  $\eta$  tel que  $K_\eta \subset \mathcal{B}(c, \varepsilon)$ .

- Comme  $\mu$  est une mesure invariante,

$$\begin{aligned}
 \mu(\mathcal{B}(c, \varepsilon)) &\geq \mu(K_\eta) \\
 &= P_T^* \mu(K_\eta) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} P_T(z, K_\eta) \mu(dx) \\
 &\geq \int_{\mathcal{B}_R} P_T(z, K_\eta) \mu(dx) \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Finalement, nous avons montré que  $c \in \text{Supp}(\mu)$ .

Rappelons que les mesures ergodiques invariantes par rapport à un semigroupe fortement fellerien ont des supports disjoints (cf. Proposition II.3.6). Donc, s'il existe deux mesures invariantes distinctes,  $c$  sera dans le support de chacune d'entre elles, ce qui est impossible!  $\square$

#### La stabilité et l'harmonicité

Dans cette partie, nous montrons que lorsque le graphe  $G = (\mathcal{V}, \sim, \partial\mathcal{V})$  est asymétrique et lorsque les potentiels sont harmoniques,  $z_t \equiv 0$  est l'unique solution du système

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= p_i \\ \dot{p}_i &= -q_i - \sum_{j \sim i} (q_i - q_j) - p_i \mathbb{1}_{i \in \partial\mathcal{V}} \\ p_i \mathbb{1}_{i \in \partial\mathcal{V}} &= 0 \end{cases}.$$

**Proposition II.4.3.** *Lorsque les potentiels sont harmoniques, la condition (II.11) de stabilité est équivalente à la condition (II.6) d'asymétrie.*

*Démonstration.* En écrivant l'équation associée à l'atome en contact avec le thermostat  $i \in \partial\mathcal{V}$ ,

$$\langle z, e_{i+N} \rangle \equiv 0.$$

Ainsi, si nous dérivons cette équation par rapport au temps, comme  $p_i = 0$  sur  $\partial\mathcal{V}$ ,

$$\sum_{j \sim i} p_j \equiv 0,$$

ce que nous réécrivons à l'aide de la matrice d'adjacence  $\Lambda$ ,

$$\langle z, \Lambda e_{i+N} \rangle \equiv 0.$$

Par récurrence, nous montrons que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \partial\mathcal{V}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\langle z_t, \Gamma^k e_{i+N} \rangle = 0.$$

Ainsi, le lemme II.2.3 assure que lorsque la condition (II.6) d'asymétrie est satisfaite,

$$q \equiv p \equiv 0.$$

$\square$

## II.5 L'unicité : la contrôlabilité

La démarche suivante, décrite par M. Hairer [Hai05] permet de supprimer l'hypothèse (II.14) de rigidité dans le théorème II.10. Pour cela, nous allons démontrer l'irréductibilité du semigroupe sous la condition de régularité de Hörmander. Nous allons envisager deux notions d'irréductibilité. La première est l'irréductibilité *forte*. Elle assure qu'à tout instant et pour tout point de départ le noyau associé au semigroupe est de support plein. La deuxième est l'irréductibilité *faible*. Elle assure que pour tout ouvert  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  et pour tout point de départ, il existe un instant où le noyau du semigroupe charge  $A$ . Nous verrons par la suite que cette condition est plus adaptée au problème des réseaux conducteurs de chaleur. En utilisant le théorème II.11 du support de Stroock-Varadhan, cette irréductibilité se traduit par des propriétés de contrôlabilité du système déterministe.

Dans [EPRB99b], les auteurs montrent l'irréductibilité forte du semigroupe lorsque le réseau est une chaîne d'oscillateurs. Nous ne pouvons pas généraliser leur méthode à des réseaux plus généraux car ils utilisent la géométrie de la chaîne : partant de l'un des thermostats on atteint de proche en proche chacun des atomes. La démarche suivante permet de surmonter cette difficulté. Par rapport à [Hai05], nous montrons que la diffusion associée aux réseaux d'oscillateurs est récurrente. Nous commencerons par rappeler les différentes notions de contrôlabilité, puis, suivant l'article [Car07], nous montrerons la contrôlabilité forte des réseaux harmoniques sous la condition (II.6) d'asymétrie. Nous terminerons en expliquant la démarche permettant de montrer le théorème suivant.

**Théorème II.13.** *Lorsque la diffusion associée au réseau conducteur de chaleur satisfait la condition (II.9) de Hörmander, la mesure invariante du système est unique. De plus, en notant  $\mu$  cette mesure invariante,  $\text{Supp } \mu = \mathbb{R}^n$ .*

*Remarque.* Ce théorème nécessite l'existence d'une mesure invariante à support plein (ici la mesure de Gibbs). Ainsi, il ne permet d'obtenir l'unicité de la mesure invariante que lorsque *chacune* des températures est *strictement* positive.

### II.5.1 Discussion

- Dans le cadre plus général proposé par M. Hairer, le théorème de contrôlabilité faible permet de montrer que l'hypoellipticité implique la contrôlabilité faible, quand on connaît une mesure de probabilité invariante à support plein. En général, l'hypoellipticité implique seulement l'atteignabilité. Nous rappelons ci-dessous quelques résultats de théorie du contrôle.

**Définition II.9** (cf. [Sas99] p.511-516). Considérons  $z = (x, y)$  la solution d'un système différentiel déterministe  $(\mathcal{S})$ .

- \*  $(\mathcal{S})$  est dit *contrôlable* si pour tout couple de points  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe un instant  $T$  et un contrôle  $u$  tels que

$$(x_0, y_0) = z_0, (x_T, y_T) = z_1.$$

- \*  $(\mathcal{S})$  est dit *fortement contrôlable* s'il existe un instant  $T$  tel que pour tout couple de points  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe un contrôle  $u$  tel que

$$(x_0, y_0) = z_0, (x_T, y_T) = z_1.$$

- \* L'ensemble *atteignable* depuis  $z_0$  à l'instant  $T$  est défini par

$$R(z_0, \leq T) = \{z \in \mathbb{R}^n; \exists s \leq T \text{ et un contrôle tels que } (x_0, y_0) = z_0, (x_s, y_s) = z\}$$

Le théorème de contrôlabilité (cf. [Sas99] Theorem 11.4) assure que si la condition (II.9) de Hörmander est satisfaite sur un voisinage de  $z_0$ , alors pour tout instant  $T > 0$ , l'ensemble atteignable  $R(z_0, \leq T)$  est d'intérieur non vide. D'autre part, si le système déterministe est fortement contrôlable (cf. [RB06]), la diffusion est irréductible. Le but de cette partie est d'utiliser la théorie des probabilités pour montrer que les systèmes déterministes que nous considérons sont *faiblement contrôlables*.

La difficulté pour contrôler ces systèmes provient de la dérive qui tire le système dans une certaine direction. Nous montrons dans ce qui suit que lorsque l'algèbre de Lie est de rang plein, le bruit permet de visiter tous les états du système. Cependant, nous ne pouvons pas contrôler le temps mis pour aller d'un état à l'autre.

L'exemple proposé par M. Hairer [Hai05] montre que la contrôlabilité faible peut avoir lieu sans qu'il y ait contrôlabilité forte.

- Nous mettons en évidence le fait que la contrôlabilité faible fournit d'autres informations sur le comportement de la diffusion. En particulier, nous pouvons montrer que la diffusion est topologiquement transitive (cf. [Wu01]) et récurrente.
- Toute cette partie est écrite en supposant que le semigroupe satisfait la condition (II.9) de Hörmander. Cependant, dans le but de généraliser les résultats suivants au cadre de potentiels non analytiques, nous remarquons qu'ils sont encore valables lorsque le semigroupe est asymptotiquement fortement fellerien (cf. Définition II.6).

## II.5.2 La contrôlabilité forte

Nous présentons ici la propriété de contrôlabilité forte dans le cadre d'équations différentielles stochastiques linéaires. En effet, c'est dans ce cadre que nous pourrions montrer que cette propriété de contrôlabilité est satisfaite par les réseaux d'oscillateurs. En particulier, cette partie permet d'obtenir une nouvelle fois l'unicité de la mesure invariante du théorème II.3. On considère le système différentiel

$$\dot{z}_t = f(z_t) + \sigma u(t), u \in \mathcal{C}. \quad (\text{II.13})$$

**Définition II.10 (Contrôlabilité forte).** On dit que le système est *fortement contrôlable* si l'ensemble des points atteignables en temps  $t$  est l'espace  $\mathbb{R}^n$ , i.e.

$$\{z_t; \exists u \in \mathcal{C}^-, \dot{z}_s = f(z_s) + Bu(s)\} = \mathbb{R}^n.$$

**Théorème II.14** (cf. [Won79], p.36-38). *Dans le cadre d'un système différentiel linéaire,  $\dot{z}_t = Mz_t + \sigma u(t)$ , on définit*

$$E_{M,S} = S + MS + \cdots + M^{n-1}S,$$

*où  $S$  désigne l'image de  $\sigma$ . Le système différentiel est fortement contrôlable si et seulement si  $E_{M,S} = \mathbb{R}^n$ .*

*Remarque.* Lorsque le système est fortement contrôlable, le théorème II.11 du support de Stroock-Varadhan assure que le semigroupe est fortement irréductible, i.e. pour tout  $t > 0$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{Supp } P_t(z, \cdot) = \mathbb{R}^n$  et le théorème suivant permettra de conclure.

**Théorème II.15** (cf. [Mat07], Corollary 6.17 par exemple). *Lorsque le semigroupe  $(P_t)$  est fortement Fellerien et fortement irréductible, la mesure invariante, si elle existe, est unique.*

*Démonstration bis : Unicité dans le théorème II.3.* La régularité est une conséquence de la condition (II.9) de Hörmander obtenue dans la proposition II.3.13.

En ce qui concerne la contrôlabilité, on remarque que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Gamma & -I_\partial \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{\partial\mathcal{V}} \end{pmatrix},$$

Ainsi, on aura contrôlabilité forte dès que  $\text{Vect}\{M^k e_{i+N}, k \in \mathbb{N}, i \in \partial\mathcal{V}\} = \mathbb{R}^n$ . On obtient ainsi successivement,

- $Me_{i+N} = -\frac{1}{2}e_{i+N} + e_i$ , soit  $e_i \in E_{M,S}$ .
- $Me_i = -\Gamma e_i \in E_{M,S}$ .
- $M\Gamma e_i = \Gamma^2 e_{i+N} \in E_{M,S}$ .
- $M\Gamma^2 e_{i+N} = \Gamma^2 e_i - \underbrace{\frac{1}{2}I_\partial \Gamma^2 e_{i+N}}_{\in \text{Vect}\{e_i, i \in \partial\mathcal{V}\}}$ , soit  $\Gamma^2 e_i \in E_{M,S} \dots$

Ainsi, par récurrence, on obtient

$$E_{M,S} = \text{Vect} \left\{ \Gamma^k e_i, \Gamma^k e_{i+N}, k \in \mathbb{N}, i \in \partial\mathcal{V} \right\}.$$

Or, on rappelle que

$$E_{\Gamma, \partial\mathcal{V}} = \text{Vect} \left\{ \Gamma^k e_i, k \in \mathbb{N}, i \in \partial\mathcal{V} \right\}.$$

Finalement,  $E_{M,S} = \mathbb{R}^n$  si et seulement si la condition (II.6) d'asymétrie est satisfaite.  $\square$

L'absence de critères de contrôlabilité forte dans le cadre de potentiels généraux nous incite à introduire la notion de contrôlabilité faible ci-dessous.

### II.5.3 La contrôlabilité faible

La propriété de contrôlabilité forte précédente n'étant pas vérifiable en général, nous allons nous intéresser à la propriété de contrôlabilité faible suivante. Nous considérons le système différentiel stochastique

$$\begin{cases} dX_t &= f(X_t, Y_t) dt \\ dY_t &= g(X_t) dt - \nabla_y H dt + \sigma dB_t, \end{cases} \quad (\Sigma)$$

où nous rappelons que  $\sigma$  est une matrice inversible, ainsi que son système déterministe associé

$$\begin{cases} \dot{x}_t &= f(x_t, y_t) \\ \dot{y}_t &= g(x_t) - \nabla_y H(x_t, y_t) + \sigma u(t), \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

où  $u$  est la fonction de *contrôle*.

**Définition II.11 (Contrôlabilité faible).** Si pour tout point de départ  $z_0$  et pour tout ouvert d'arrivée  $A$ , il existe un contrôle  $u$  et un instant  $T = T_{z_0, A}$  tels que la solution  $(x_t, y_t)$  du système  $(\mathcal{S})$  satisfait

$$(x_0, y_0) = z_0, (x_T, y_T) \in A,$$

alors ce système sera dit *faiblement contrôlable* (cf. figure II.9).

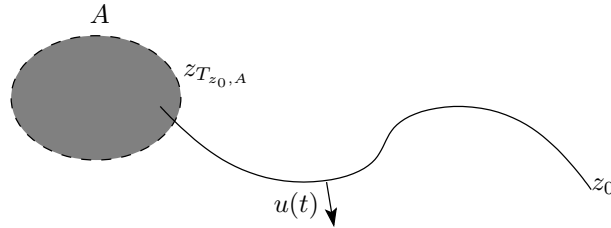


FIG. II.9 – Illustration de la propriété de contrôlabilité faible

Pour prouver le théorème d'unicité II.13, on va prouver la contrôlabilité faible du système  $(\mathcal{S})$  déterministe correspondant. Pour étudier la contrôlabilité faible de ce système, on va utiliser un système  $(\tilde{\mathcal{S}})$  déterministe modifié. Et enfin, pour montrer la contrôlabilité faible de ce dernier, on utilisera la diffusion stochastique  $(\tilde{\Sigma})$  correspondante.

### II.5.4 La démonstration du théorème II.13

*Première étape : Équivalence entre problèmes de contrôlabilité*

Tout d'abord, mettons en valeur un fait très simple à propos de la contrôlabilité des systèmes.



**Définition II.12 (Équivalence).** Deux systèmes déterministes sont dits *équivalents* si la faible contrôlabilité de l'un d'entre eux implique la faible contrôlabilité de l'autre.

Définissons le système déterministe auxiliaire

$$\begin{cases} \dot{x}_t &= f(x_t, y_t) \\ \dot{y}_t &= g(x_t) - \nabla_y H(x_t, y_t) + \tilde{\sigma} u(t), \end{cases} \quad (\tilde{\mathcal{S}})$$

où  $\tilde{\sigma}$  est une matrice inversible à coefficients constants.

**Proposition II.5.1 (Équivalence entre systèmes dynamiques).** *Le système déterministe  $(\mathcal{S})$  est équivalent au système déterministe  $(\tilde{\mathcal{S}})$ .*

*Démonstration.* Soient  $z_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose qu'il existe un temps  $T$  et un contrôle  $u$  tels que

$$(x_0, y_0) = z_0, \quad (x_T, y_T) \in A.$$

Soit  $\nu(t) = \sigma^{-1} \tilde{\sigma} u(t)$ . Alors,  $(x, y)$  est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}_t &= f(x_t, y_t) \\ \dot{y}_t &= g(x_t) + \tilde{\sigma} \nu(t). \end{cases}$$

Le système  $(\tilde{\mathcal{S}})$  est ainsi faiblement contrôlable.  $\square$

*Remarque.* Dans le cadre des réseaux conducteurs de chaleur, nous pouvons ainsi remplacer la matrice  $\sigma = \text{diag}(\sqrt{2T_i}, i \in \partial\mathcal{V})$  par la matrice  $\sqrt{2}Id$ .

*Deuxième étape : Système stochastique et mesure invariante*

Nous pouvons maintenant considérer le système stochastique *associé* au système déterministe  $(\tilde{\mathcal{S}})$  précédent :

$$\begin{cases} dx(t) &= f(x_t, y_t) dt \\ dy(t) &= g(x_t) dt - \nabla_y H dt + \sqrt{2} dB_t, \end{cases} \quad (\tilde{\Sigma})$$

où  $(B_t)$  est un mouvement brownien  $|\partial\mathcal{V}|$ -dimensionnel.

- Nous avons déjà montré lors du théorème II.1 que la diffusion associée à ce système est bien définie.
- Nous remarquons que ce système admet une mesure invariante qui est la mesure de Gibbs avec des températures égales à 1 (cf. Théorème II.2).
- Par hypothèse, la fonction  $e^{-H}$  est intégrable et la mesure de probabilité correspondante  $e^{-H}/Z dz$  est de support plein.

Donc, en utilisant le théorème II.6 d'unicité et la condition (II.9) de Hörmander, nous obtenons que  $\mu_H$  est l'unique mesure invariante ergodique du système différentiel stochastique alternatif  $(\tilde{\Sigma})$ .

Dans l'étape suivante, nous allons utiliser cette propriété d'ergodicité pour montrer la contrôlabilité faible du système déterministe associé à la diffusion.

*Troisième étape : De l'ergodicité à la récurrence*

L'unicité de la mesure invariante, sous des conditions de régularité du semigroupe, induit la récurrence de la diffusion.

**Proposition II.5.2 (Récurrence).** *Si le semigroupe est fortement fellerien et qu'il existe une mesure invariante ergodique  $\mu_H$ , tout ensemble mesurable  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\mu_H(A) > 0$  est récurrent.*

Rappelons que le semigroupe peut être étendu à une mesure de probabilité sur l'ensemble des fonctions continues (cf. [RB06] p. 10). Nous introduisons tout d'abord quelques notations élémentaires en rapport avec la dynamique du système stochastique  $(\tilde{\Sigma})$ . Soit  $\theta_t$  l'opérateur de translation temporelle sur les trajectoires, i.e.

$$\theta_t \circ Z. = Z_{t+..}$$

Nous introduisons deux quantités principales : la fonction  $h$  mesure la récurrence de la diffusion, la tribu  $\mathcal{J}$  est appelée la tribu invariante

$$\begin{aligned} h(z) &= \mathbf{P}_z \left\{ \limsup_t (\mathbb{1}_{Z_t \in A}) = 1 \right\}, \\ \mathcal{J} &= \sigma \left\{ \Gamma \subset \mathcal{C}([0, \infty], \mathbb{R}^n), \theta_t^{-1}(\Gamma) = \Gamma, \forall t > 0 \right\}. \end{aligned}$$

**Lemme II.5.3.** *Lorsque le semigroupe est fortement fellerien et la mesure invariante est ergodique, la fonction  $h$  est constante.*

*Démonstration.* On notera  $(\mathcal{F}_t)$  la filtration naturelle du mouvement brownien. La propriété de Markov assure que  $h$  est invariante car pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} P_t h(z) &= \mathbf{E}_z[h(Z_t)] \\ &= \mathbf{E}_z \left[ \mathbf{P}_{Z_t} \left\{ \limsup_s (\mathbb{1}_{Z_s \in A}) = 1 \right\} \right] \\ &= \mathbf{P}_z \left[ \limsup_s (\mathbb{1}_{Z_{t+s} \in A}) = 1 \right] \\ &= h(z). \end{aligned}$$

D'autre part,  $h(Z_t)$  est une martingale,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z[h(Z_{t+s}) | \mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}_{Z_s}[h(Z_t)] \\ &= P_t h(Z_s) \\ &= h(Z_s). \end{aligned}$$

Comme  $h(Z_t)$  est bornée, elle est donc convergente, i.e. il existe une variable aléatoire  $Z$   $\mathcal{J}$ -mesurable telle que

$$Z = \lim_{t \rightarrow \infty} h(Z_t), \mathbf{P}_{\mu_H} - p.s.$$

Comme  $\mu_H$  est ergodique (grâce au théorème II.6 de support), la tribu  $\mathcal{J}$  est triviale et

$$Z = \text{constante}, \mathbf{P}_{\mu_H} - p.s.$$

Or,  $h(z) = \mathbf{E}_z[Z]$ . Ainsi,

$$h = \text{constante}, \mu_H - p.s.$$

Finalement, le semigroupe est fortement fellerien et  $h$  est bornée, donc  $h$  est continue. Ainsi, comme  $\mu_H$  est à support plein,  $h$  est constante.  $\square$

Avant d'aborder la démonstration de la proposition II.5.2 de récurrence, nous rappelons le théorème bien connu suivant.

**Théorème II.16 (Théorème de récurrence de Poincaré).** *Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace de probabilité et  $\theta$  une application mesurable qui conserve la mesure  $\mu$ . Alors, pour tout  $A \subset \Omega$  tel que  $\mu(A) > 0$ , pour presque tout  $z \in A$ , il existe une suite strictement croissante  $(k_n)$  telle que*

$$\theta^{k_n} z \in A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Démonstration de la proposition II.5.2.* Pour prouver la propriété de récurrence, nous allons appliquer le théorème de récurrence de Poincaré à la mesure  $\mathbf{P}_{\mu_H}$  induite par  $\mu_H$  sur l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+$ , invariante par l'opérateur de translation  $\theta_t$ .

Soient  $A$  un ouvert non vide,  $E_A = \{Z; Z_0 \in A\}$ . Comme  $\mu_H$  est de support plein sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{P}_{\mu_H}(E_A) = \mu_H(A) > 0.$$

Ainsi, il existe  $F \subset E_A$  tel que  $\mathbf{P}_{\mu_H}(F) = \mathbf{P}_{\mu_H}(E_A)$  et pour tout  $Z \in F$ , il existe une sous-suite  $t_n$  telle que

$$\theta^{t_n} Z \in E_A, \forall n \in \mathbb{N},$$

i.e.  $Z_{t_n} \in A, \forall n \in \mathbb{N}$ . Finalement, pour presque tout  $z = Z_0 \in A$ , nous avons

$$h(z) = 1.$$

Cependant, d'après le lemme précédent,  $h$  est constante, soit

$$h \equiv 1.$$

Tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  chargé par la mesure invariante  $\mu_H$  est donc récurrent.  $\square$

*Quatrième étape : Faible contrôlabilité*

Pour résoudre le problème de la faible contrôlabilité, nous allons utiliser une réalisation du mouvement brownien correspondant au système stochastique pour lequel nous allons utiliser la propriété II.5.2 de récurrence.

**Lemme II.5.4.** *Le système déterministe  $(\mathcal{S})$  est faiblement contrôlable.*

*Démonstration.* On montre ici la contrôlabilité faible du système alternatif  $(\tilde{\mathcal{S}})$ . Pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , soit  $\tau_A$  le temps d'atteinte de l'ouvert  $A$ . D'après le lemme précédent, nous avons

$$\mathbf{P}_z(\tau_A < +\infty) = 1.$$

Soit  $\Gamma_z$  l'ensemble des trajectoires du mouvement brownien telles que  $\tau_A < +\infty$  et  $\mathcal{W}$  la mesure de Wiener. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(B \in \Gamma_z) &= \mathbf{P}_z(\tau_A < +\infty) \\ &= 1. \end{aligned}$$

D'où,  $\Gamma_z \neq \emptyset$  et nous pouvons choisir une trajectoire  $B(\omega)$  dans  $\Gamma_z$  telle que  $T := \tau_A(\omega) < +\infty$ ,

$$Z_0(\omega) = z, Z_{\tau_A(\omega)}(\omega) = \int_0^T f(Z_s) ds + \int_0^T \sigma \circ dB_s \in A.$$

Comme l'intégrale par rapport à des approximations linéaires par morceaux  $(B^{(n)})_n$  du mouvement brownien converge vers l'intégrale de Stratonovitch, il existe un contrôle continu par morceaux tel que

$$z_0 = z, z_T \in A.$$

Enfin, nous pouvons conclure que le système  $(\tilde{\mathcal{S}})$  est faiblement contrôlable et d'après le théorème II.5.1 d'équivalence le système  $(\mathcal{S})$  est faiblement contrôlable.  $\square$

*Remarque.* Dès que la diffusion est fortement fellerienne, pour tout sous ensemble mesurable  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto P_t(z, A)$  est continue et  $\int_0^\infty \mathbb{1}_{Z_s \in A} ds > 0$  si  $\mu_H(A) > 0$ . Ainsi, la diffusion est  $\mu_H$ -irréductible (cf. [MT93] p.520).

*Cinquième étape : Démonstration du Théorème II.13*

**Lemme II.5.5.** *Supposons que le système déterministe  $(\mathcal{S})$  soit faiblement contrôlable. Soit  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , il existe un instant  $T > 0$  tel que*

$$P_T(z, A) > 0.$$

*Démonstration.* Soit  $z \in \mathbb{R}^n$ . Par hypothèse, il existe  $z_0 \in A$  et un contrôle continu tel que

$$(x_0, y_0) = z, (x_T, y_T) = z_0.$$

Ainsi, en utilisant le théorème du support,  $z_0 \in \text{Supp } P_T(z, \cdot)$  et

$$P_T(z, A) > 0.$$

$\square$

**Lemme II.5.6.** *Supposons que le système déterministe  $(\mathcal{S})$  soit faiblement contrôlable et le semigroupe  $(P_t)$  fortement fellerien. Alors, pour toute mesure  $\mu$  invariante pour le semigroupe  $(P_t)$ ,*

$$\text{Supp } \mu = \mathbb{R}^n.$$

*Démonstration.* En effet, soit  $z \in \text{Supp } \mu$ ,  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $T$  défini comme dans le lemme II.5.5 précédent. Comme  $u \mapsto P_T(u, A)$  est continue, il existe un voisinage  $\mathcal{B}(z, \varepsilon)$  de  $z$  et une constante  $c_0 > 0$  telle que pour tout  $u \in \mathcal{B}(z, \varepsilon)$ ,  $P_T(u, A) \geq c_0$  :

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{\mathbb{R}^n} P_T(u, A) \mu(du) \\ &\geq \int_{\mathcal{B}(z, \varepsilon)} P_T(u, A) \mu(du) \\ &\geq c_0 \mu(\mathcal{B}(z, \varepsilon)) \\ &> 0, \end{aligned}$$

car  $z \in \text{Supp } \mu$ . □

*Démonstration du théorème II.13 d'unicité.* Comme la condition (II.9) de Hörmander est satisfaite, en utilisant le lemme précédent,  $\text{Supp } \mu = \mathbb{R}^n$ . Ainsi, le théorème II.6 implique l'unicité de la mesure invariante  $\mu$ . De plus, cette mesure est ergodique. □

## II.6 L'existence de mesures invariantes

### II.6.1 La compacité

On suppose que les potentiels  $U, V$  sont des polynômes unitaires et on note  $u$  (resp.  $v$ ) leur degré. On supposera dans toute cette partie que  $u \geq v$ .

**Théorème II.17.** *On suppose que le semigroupe  $(P_t)$  est fortement fellerien et que la condition (II.14) de rigidité est satisfaite pour le système  $(\mathcal{S}_\infty)$  défini ci-dessous. Alors, lorsque le degré de  $U$  est plus grand que le degré de  $V$ , il existe une mesure invariante.*

La démonstration de ce théorème repose sur les mêmes arguments que ceux de [RBT02], présentés également dans [Car07]. Nous reproduisons cependant les grandes lignes de la démonstration pour montrer l'importance de la condition de rigidité.

*Remarque.* Dans le cadre de cette démonstration, l'absence d'irréductibilité forte du semigroupe dans le cadre général des réseaux conducteurs de chaleur empêche d'obtenir la convergence exponentielle vers la mesure invariante contrairement au cas de la chaîne d'oscillateurs. Cependant, à ce jour, aucun résultat ne permet de connaître la vitesse de convergence vers la mesure invariante dans ce cadre.

La démonstration du théorème se fait via la méthode de Krylov-Bogoliubov classique.

**Lemme II.6.1.** *S'il existe une fonction de Lyapunov  $W$ , telle que*

1.  $\mathcal{L}W(z) \leq CW(z)$  pour une constante  $C > 0$ ,
2. il existe un instant  $t_0 > 0$  et une suite  $a_n \uparrow +\infty$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{z, W(z) > a_n\}} \frac{P_{t_0} W(z)}{W(z)} = 0,$$

alors le système admet une mesure invariante.

*Démonstration.* La démonstration se décompose en deux arguments principaux.

1. Notons  $K$  le compact  $\{W(x) \leq a_n\}$ , pour  $n$  assez grand. On remarque que, par hypothèse, il existe  $a \in (0, 1)$ ,  $b$  tels que

$$P_{t_0}W(z) \leq aW(z) + b\mathbb{1}_K(z).$$

Ainsi, en utilisant la propriété de semigroupe, on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} P_{nt_0}W(z) &\leq a^n W(z) + b + ab + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1}b\mathbb{1}_K(z) \\ &\leq a^n W(z) + \frac{b}{1-a}. \end{aligned}$$

Or, comme  $\mathcal{L}W(z) \leq CW(z)$ , on a  $P_t W(z) \leq e^{Ct}W(z)$  et ainsi, en choisissant  $n$  tel que  $nt_0 \leq t < (n+1)t_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} P_t W(z) &= P_{nt_0} P_{t-nt_0} W(z) \\ &\leq e^{C(t-nt_0)} P_{nt_0} W(z) \\ &\leq e^{C(t-nt_0)} \left( a^n W(z) + \frac{b}{1-a} \right) \\ &\leq e^{Ct_0} \left( W(z) + \frac{b}{1-a} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\sup_t P_t W(z) < +\infty.$$

2. Il suffit alors de considérer pour  $z \in \mathbb{R}^n$  la suite de mesures définies pour toute fonction borélienne bornée par

$$\nu_t(f) = \frac{1}{t} \int_0^t P_s f(z) ds.$$

En effet, on remarque que  $\sup_t \nu_t(W) \leq \sup_t P_t W(z) < +\infty$ . Donc, d'après le théorème de Prokhorov, la suite  $(\nu_t)$  est tendue et admet une sous-suite  $(\nu_{t_n})$  convergente vers une mesure  $\nu$ , i.e. pour toute fonction continue bornée,

$$\nu_{t_n}(f) \rightarrow \nu(f).$$

Comme  $(P_t)$  est fortement fellerien, si  $f$  est mesurable bornée,  $P_s f$  est continue bornée et on a pour tout  $s > 0$ ,

$$\lim_n \nu_{t_n}(P_s(f)) = \nu(P_s f).$$

Enfin, en utilisant la définition de  $\nu_t$ ,

$$\begin{aligned}
 \nu_{t_n}(P_s f) &= \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} P_u P_s f(z) du \\
 &= \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} P_{u+s} f(z) du \\
 &= \frac{1}{t_n} \int_s^{s+t_n} P_u f(z) du \\
 &= \frac{s+t_n}{t_n} \nu_{s+t_n}(f) - \frac{s+t_n}{t_n} \int_0^s P_u f(z) du \\
 &\rightarrow \nu(f).
 \end{aligned}$$

Finalement, on a bien pour tout  $s > 0$ ,  $P_t^* \nu = \nu$  et la mesure  $\nu$  est invariante.  $\square$

Dans la suite, on choisit comme fonction de Lyapunov  $W(z) = e^{\beta H(z)}$ .

**Lemme II.6.2.** *Soit  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < \beta < \max(T_i, i \in \partial\mathcal{V})^{-1}$ . Il existe une constante  $C > 0$  et  $a, b > 1$  tels que*

$$\frac{P_t W(z)}{W(z)} \leq e^{C\beta t \sum_i T_i} \mathbf{E}_z \left[ e^{-C \int_0^t \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} p_i^2 ds} \right]^{1/b}.$$

On rappelle brièvement comment se démontre ce lemme.

*Démonstration.* Soit  $\beta \in (0, \max(T_i, i \in \partial\mathcal{V})^{-1})$ . D'après la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
 H(Z_t^z) &= H(z) + \int_0^t \left\{ \sum_{i \in \mathcal{V}} \partial_{q_i} H \partial_{p_i} H ds - \partial_{p_i} H \partial_{q_i} H ds - \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} \partial_{p_i} H p_i ds + \sqrt{2T_i} \partial_{p_i} H dB_i + T_i ds \right\} \\
 &= H(z) + \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} T_i t - \int_0^t \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} p_i^2 ds + M_t
 \end{aligned}$$

On remarque par ailleurs que  $(M_t)$  est une martingale de variation quadratique

$$[M, M]_t = 2 \int_0^t \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} T_i p_i^2 ds.$$

$$\begin{aligned}
 \frac{P_t W(z)}{e^{\beta H(z)}} &= \mathbf{E}_z \left[ e^{\beta(H(Z_t) - H(z))} \right] \\
 &= \mathbf{E}_z \left[ e^{\beta(H(Z_t) - H(z))} \right] \\
 &= \mathbf{E}_z \left[ e^{\beta M_t - a \frac{\beta^2}{2} [M]_t} e^{a \frac{\beta^2}{2} [M]_t + \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} T_i t - \int_0^t \sum_{i \in \partial\mathcal{V}} p_i^2 ds} \right]
 \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité d'Hölder ainsi que les martingales exponentielles, on obtient le résultat attendu.  $\square$

Pour démontrer que les hypothèses du lemme précédent sont bien satisfaites, on utilise une méthode de changement d'échelle permettant de s'intéresser à la dynamique sans bruit.

Pour cela, on définit une suite d'énergies  $(E_n)$  tendant vers  $+\infty$  et on considère le changement d'échelle de l'hamiltonien

$$H_n(q, p) = \sum_{i \in \mathcal{V}} \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{E_n} V \left( E_n^{1/u} q_i \right) + \frac{1}{2E_n} \sum_{j \sim i} U \left( E_n^{1/u} (q_j - q_i) \right).$$

On considère alors l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dq_i &= \partial_{p_i} H_n dt \\ dp_i &= -\partial_{q_i} H_n dt - \mathbb{1}_{i \in \partial \mathcal{V}} E_n^{1/u-1/2} \partial_{p_i} H_n dt + \mathbb{1}_{i \in \partial \mathcal{V}} E_n^{1/2u-3/4} dB_i. \end{cases} \quad (\mathcal{S}_n)$$

Les solutions de ce système convergent vers les solutions du système correspondant à l'hamiltonien limite (cf. [Car07] Section 5 pour plus de détails)

$$H_\infty(q, p) = \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} \frac{p_i^2}{2} + \mathbb{1}_{u=v} |q_i|^v + \frac{1}{2} \sum_{j \sim i} (q_j - q_i)^u.$$

On considère ainsi le système différentiel sans bruit, pour tout  $i \in \mathcal{V}$ ,

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \partial_{p_i} H_\infty \\ \dot{p}_i &= -\partial_{q_i} H_\infty - \mathbb{1}_{i \in \partial \mathcal{V}} \partial_{p_i} H_\infty. \end{cases} \quad (\mathcal{S}_\infty)$$

**Condition (Condition de rigidité).** Nous dirons qu'une solution du système différentiel (II.1) satisfait la condition de rigidité si le système

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \partial_{p_i} H_\infty \\ \dot{p}_i &= -\partial_{q_i} H_\infty - \mathbb{1}_{i \in \partial \mathcal{V}} \partial_{p_i} H_\infty \\ p_i \mathbb{1}_{i \in \partial \mathcal{V}} &\equiv 0, \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

a une unique solution donnée par  $z_t \equiv c$ .

**Lemme II.6.3.** *Si le système  $(\mathcal{S}_\infty)$  satisfait la condition (II.14) de rigidité, alors pour tout point  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $H_\infty(z_0) = 1$ , pour toute solution de  $(\mathcal{S}_\infty)$  issue de  $z_0$ , pour tout instant  $t > 0$ ,*

$$\int_0^t \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} p_i^2 ds > 0.$$

*Démonstration.* On suppose par l'absurde qu'il existe  $t > 0$  tel que

$$\int_0^t \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} p_i^2 ds = 0.$$



Rappelons que nous avons supposé que l'hamiltonien  $H$  est strictement convexe et atteint son unique minimum en  $c \in \mathbb{R}^n$ . Nous supposons que ce minimum est nul. D'après la condition (II.14) de rigidité,  $s \in (0, t)$ ,  $z_t = c$ . On a alors,  $H_\infty(z_0) = H_\infty(c) = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse initiale,  $H_\infty(z_0) = 1$ .  $\square$

Le théorème II.17 d'existence de la mesure invariante est une conséquence du lemme suivant. La démonstration ne sera pas reproduite ici car elle est identique à celle effectuée dans [Car07] Lemma 5.2.

**Lemme II.6.4.** *Supposons que  $Z_n$  soit une solution de  $(\mathcal{S}_n)$  issue de  $z_n$ , avec  $H(z_n) \rightarrow \infty$ . Alors, il existe une sous-suite  $(z_{n_k})_k$  telle que pour tout  $C > 0$ ,  $t > 0$ ,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{z_{n_k}} \left[ e^{-C \int_0^t \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} p_i^2 ds} \right] = 0.$$

## II.6.2 La non-compacité

Dans cette partie, on suppose que les potentiels  $U$  et  $V$  sont des monômes de degrés respectifs  $u, v \in 2\mathbb{N}^*$ . On suppose de plus que  $U$  est harmonique, c'est-à-dire que  $u = 2$ . Cette partie est une réécriture des arguments donnés par M. Hairer et J. Mattingly [HM07] dans le cadre des réseaux d'oscillateurs.

**Théorème II.18.** *Lorsque  $4 \leq v$ , la résolvante de  $\mathcal{L}$  n'est pas compacte. Si  $4 < v$ , 0 appartient au spectre essentiel de  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}$  ne possède pas de trou spectral.*

*Remarque.* Le choix de description de la dynamique effectué dans cette démonstration inspirée de [HM07] ne permet pas de supprimer l'hypothèse  $U$  harmonique. Cependant, il est probable que ces résultats restent vrai dans un cadre plus général.

Dans cette section, la stratégie consiste à étudier le spectre essentiel de  $\mathcal{L}$  via un opérateur conjugué. On montre que 0 appartient au spectre essentiel de  $\mathcal{L}$ . Ainsi, même si la mesure invariante existe, il n'y aura pas convergence vers celle-ci à un taux exponentiel.

### L'opérateur conjugué

On rappelle que le générateur  $\mathcal{L}$  de la diffusion est défini par

$$\mathcal{L} = \sum_{i \in \mathcal{V}} \partial_{p_i} H \partial_{q_i} - \partial_{q_i} H \partial_{p_i} - \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} p_i \partial_{p_i} + \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} T_i \partial_{p_i}^2.$$

Un simple calcul montre que

$$\frac{\mathcal{L} e^{\beta H}}{e^{\beta H}} = \beta \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} T_i + \beta \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} (\beta T_i - 1) p_i^2.$$

En choisissant  $\beta < \min(1/T_i, i \in \partial \mathcal{V})$ , le générateur  $\mathcal{L}$  de la diffusion peut être prolongé en un opérateur  $\mathcal{L}_0$  sur l'espace des fonctions  $L^2(e^{-\beta H} dq dp)$  (cf. [EH00] Proposition 2.5). Ces deux opérateurs coïncident sur l'espace des fonctions  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Par

abus de notation, nous continuerons à noter  $\mathcal{L}$  l'opérateur défini sur  $L^2(e^{-\beta H} dq dp)$ . On va s'intéresser, sur l'espace  $L^2(dq dp)$  à l'opérateur conjugué défini par  $\tilde{\mathcal{L}} \cdot = e^{-\frac{\beta}{2} H} \mathcal{L} \left( e^{\frac{\beta}{2} H} \cdot \right)$ . Nous noterons  $\|\cdot\|_2$  la norme de l'espace de Hilbert  $L^2(dq dp)$ .

Un simple calcul montre que

$$\tilde{\mathcal{L}} f = \frac{\beta}{2} \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} \left( T_i + T_i \frac{\beta}{2} p_i^2 - p_i^2 \right) f + \{H, f\} + \sum_{\partial \mathcal{V}} (\beta T_i - 1) p_i \partial_{p_i} f + \sum_{\partial \mathcal{V}} T_i \partial_{p_i}^2 f.$$

*Le spectre essentiel*

**Définition II.13 (Spectre essentiel, cf. [GW69]).**  $\lambda \in \mathbb{C}$  n'appartient pas au spectre essentiel de  $\mathcal{L}$  si et seulement si

$$\dim \text{Ker}(\mathcal{L} - \lambda Id) < +\infty \text{ ou } \text{codim Im}(\mathcal{L} - \lambda Id) < +\infty.$$

*Remarque.*  $\tilde{\mathcal{L}}$  et  $\mathcal{L}$  ont le même spectre essentiel.

Pour comprendre le spectre essentiel, nous utilisons le théorème de Weyl suivant.

**Théorème II.19 (Critère de Weyl, cf. [HM07] Proposition 3.2).** *Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda$  appartient au spectre essentiel de  $\mathcal{L}$  si et seulement si il existe une suite  $(\varphi_n)$  telle que*

1. *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|\varphi_n\| = 1$ ,*
2. *La suite  $(\varphi_n)$  ne possède pas de valeur d'adhérence,*
3.  *$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}\varphi_n - \lambda\varphi_n\| = 0$ .*

*D'autre part, si 3. est remplacé par  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}\varphi_n - \lambda\varphi_n\| < +\infty$ , la résolvante de  $\mathcal{L}$  n'est pas compacte.*

Le théorème II.18 est donc une conséquence du théorème suivant.

**Théorème II.20.** *Il existe une suite de fonctions  $(\varphi_n)$  satisfaisant les conditions du critère de Weyl telle que*

1. *si  $u < \frac{v}{2}$ ,  $\|\tilde{\mathcal{L}}\varphi_n\|_2 \rightarrow 0$ ,*
2. *si  $u = \frac{v}{2}$ ,  $\sup_n \|\tilde{\mathcal{L}}\varphi_n\|_2 < +\infty$ .*

*L'équation de Poisson*

Notons  $H_0$  l'hamiltonien de la particule isolée, i.e.

$$H_0(q, p) = \frac{p^2}{2} + V(q).$$

Dans la suite, on va étudier les solutions de l'équation de Poisson

$$\{H_0, f\} = \phi, \tag{II.15}$$

pour une fonction  $\phi$  judicieusement choisie.

*Remarque.* Pour toute fonction dérivable  $f$ ,  $f(H_0)$  est invariante par le flot hamiltonien, donc est solution de  $\{H_0, f(H_0)\} = 0$ . Les solutions de l'équation précédente ne sont donc pas uniques. Dans la suite, nous expliquons quelle solution choisir.

### Les coordonnées polaires

Considérons la fonction  $r(\theta)$  (régulière d'après le théorème des fonctions implicites), solution de l'équation suivante (nous appellerons  $\Gamma$  la courbe définie en coordonnées polaires par la fonction  $r$ ) :

$$\frac{(r(\theta) \cos \theta)^2}{2} + V(r(\theta) \sin \theta) = 1.$$

En coordonnées cartésiennes,  $\Gamma$  a pour équation  $\frac{p^2}{2} + V(q) = 1$ . Ses vecteurs tangents sont ainsi colinéaires au vecteur  $\begin{pmatrix} -V'(q) \\ p \end{pmatrix}$ . Lorsque  $p, q$  se déplacent sur la courbe,

$$\{H, f\} = \omega(\theta) \partial_\theta f(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

où  $\omega(\theta)$  représente la norme du vecteur tangent. On va ainsi ramener notre problème initial à un problème défini sur la courbe  $\Gamma$  en effectuant des hypothèses d'homogénéité sur les fonctions  $\phi$  et  $V$  (cf. figure II.10).

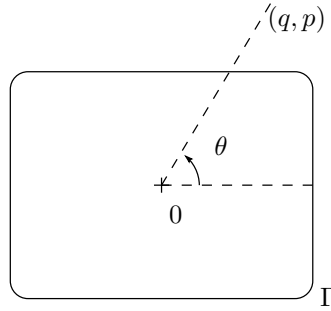


FIG. II.10 – Courbe  $\Gamma$  et changement d'échelle

Pour résoudre l'équation de Poisson, on va ainsi résoudre l'équation précédente en se ramenant à la ligne de niveau  $H_0(q, p) = 1$ , puis prolonger les solutions à l'espace  $\mathbb{R}^n$  par homogénéité.

### Les fonctions homogènes

**Définition II.14.** On dit qu'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^{2N}$  est  $(v, \alpha)$ -homogène si et seulement si

$$f(\lambda p, \lambda^{2/v} q) = \lambda^{2\alpha} f(q, p).$$

*Remarques.*

- Pour tout monôme, la fonction  $(q, p) \mapsto \frac{p^2}{2} + a_v q^v$  est  $(v, 1)$ -homogène.
- Pour tout monôme  $U$ , pour tout  $v \in \mathbb{N}$ , la fonction  $(q, p) \mapsto b_u q^u$  est  $(v, u/v)$ -homogène.

- On remarque que lorsque  $f$  est  $(v, \alpha)$ -homogène,  $\{H_0, f\}$  est  $(v, \alpha-1/v+1/2)$ -homogène

Pour toute fonction  $(v, \alpha)$ -homogène, on définit la fonction  $\tilde{f}(\theta)$  définie par la valeur de  $f$  sur la courbe  $\Gamma$ , i.e.

$$\tilde{f}(\theta) = f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta).$$

Réciproquement, comme  $V(q) = a_v q^v$ , pour toute fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $\Gamma$ , on peut définir une fonction sur  $\mathbb{R}^{2N}$   $(v, \alpha)$ -homogène, par

$$f(q, p) = \left( \frac{p^2}{2} + a_v q^v \right)^\alpha \tilde{f}(\arctan(q/p)).$$

Ainsi, on peut résoudre l'équation de Poisson pour une fonction  $\phi$   $(k, \alpha)$ -homogène en considérant la fonction  $\tilde{f}$  définie par

$$\tilde{f}(\theta) = \int_0^\theta \frac{\tilde{\phi}(u)}{\omega(u)} du - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \frac{\tilde{\phi}(t)}{\omega(t)} dt d\theta.$$

Finalement, pour résoudre l'équation (II.15), lorsque  $\phi$  est  $(v, \alpha)$ -homogène, on choisit la fonction  $(v, \alpha-1/v-1/2)$ -homogène  $f$  solution de l'équation

$$\left\{ \frac{p^2}{2} + a_v q^v, f \right\} = \phi.$$

On définit ainsi les solutions des équations

$$\begin{cases} \{H_0, \Phi\} &= -U'(q) \\ \{H_0, \Phi^{(2)}\} &= \Phi, \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

**Lemme II.6.5.** Soient  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $(v, \alpha)$ -homogène,  $\chi$  une fonction à support compact et  $\varphi : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de carré intégrable, telle qu'il existe deux fonctions mesurable  $g, h$  telles que  $\varphi(x, y) = \varphi(x - g(q_0, p_0), y - h(q_0, p_0))$ . On a alors

$$\left\| \Phi \varphi \chi \left( \frac{H_0}{\mathcal{E}} \right) \right\|_2 \lesssim \mathcal{E}^{\alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{2v}}.$$

*Démonstration.* D'après la définition de  $H_0(q_0, p_0) = \frac{p_0^2}{2} + a_v q_0^v$ , on obtient après un changement de variables

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(q_0, p_0)^2 \varphi^2 \chi \left( \frac{H_0(q_0, p_0)}{\mathcal{E}} \right)^2 dq_0 dp_0 dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \left( \mathcal{E}^{1/v} q_0, \sqrt{\mathcal{E}} p_0 \right)^2 \varphi^2 \chi \left( H_0(q_0, p_0) \right)^2 \mathcal{E}^{1/v} dq_0 \sqrt{\mathcal{E}} dp_0 dx dy \\ &= \mathcal{E}^{2\alpha + \frac{1}{v} + \frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(q_0, p_0)^2 \varphi^2 \chi \left( H_0(q_0, p_0) \right)^2 dq_0 dp_0 dx dy, \end{aligned}$$

et on obtient ainsi la majoration annoncée.  $\square$

*L'absence de trou spectral*

On note ici  $\mathcal{V} = \{0, \dots, N-1\}$ . Quitte à renommer les atomes, on suppose que  $0 \notin \partial\mathcal{V}$ . On note  $\mathcal{V}_1$  l'ensemble des voisins de 0. On appelle *génération* de l'atome (notée  $gen(i)$ )  $i$  la longueur du plus court chemin reliant  $i$  à 0. On définit sur  $\mathcal{V}$  la relation d'ordre  $i \prec j$  si ( $i \sim j$  et  $gen(i) \leq gen(j)$ ) ainsi que la relation  $i \approx j$  si ( $i \sim j$  et  $gen(i) = gen(j)$ ).

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} \bar{p}_i &= p_i + \Phi(p_0, q_0) \mathbb{1}_{i \in \mathcal{V}_1} \\ \bar{q}_i &= q_i + \Phi^{(2)}(p_0, q_0) \mathbb{1}_{i \in \mathcal{V}_1}, \end{cases}$$

où  $\Phi, \Phi^{(2)}$  sont définies en (II.16) et on définit l'hamiltonien

$$H_r(q, p) = \sum_{i \neq 0} \frac{p_i^2}{2} + V(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \sim i \\ j \neq 0}} U(q_i - q_j).$$

Soit  $\chi$  une fonction de classe  $C^\infty$  positive dont le support est inclus dans  $[1, 2]$ . Pour tout  $\mathcal{E}_n \in \mathbb{R}$ , on définit la fonction

$$\varphi_n(q, p) = C_n e^{-\frac{\beta}{2} H_r(\bar{q}, \bar{p})} \chi\left(\frac{H_0(q_0, p_0)}{\mathcal{E}_n}\right),$$

où  $C_n$  est la constante de normalisation telle que  $\|\varphi_n\|_2 = 1$ .

*Remarques.*

- Les  $(\varphi_n)$  ont des supports disjoints et donc cette suite n'a pas de valeur d'adhérence.
- D'après le lemme précédent, on vérifie que  $C_n$  est de l'ordre de  $\mathcal{E}_n^{-1/2v-1/4}$ .

*Démonstration du Théorème II.20.* On commence par évaluer (rappelons que  $0 \notin \partial\mathcal{V}$ ),

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathcal{L}}\varphi_n}{\varphi_n} &= -\frac{\beta}{2} \{H, H_r\} + \frac{\chi'}{\chi \mathcal{E}_n} \{H, H_0\} + \frac{\beta}{2} \sum_{\partial\mathcal{V}} \left( T_i + T_i \frac{\beta}{2} p_i^2 - p_i^2 \right) - \dots \\ &\quad \dots - \frac{\beta}{2} \sum_{\partial\mathcal{V}} (\beta T_i - 1) p_i \bar{p}_i + \sum_{\partial\mathcal{V}} T_i \left( -\frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4} \bar{p}_i^2 \right) \\ &= -\frac{\beta}{2} \{H, H_r\} + \frac{\chi'}{\chi \mathcal{E}_n} \{H, H_0\} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\beta^2}{4} \sum_{\partial\mathcal{V}} T_i (p_i^2 - 2p_i \bar{p}_i + \bar{p}_i^2) + \frac{\beta}{2} \sum_{\partial\mathcal{V}} (p_i \bar{p}_i - p_i^2) \\ &= -\frac{\beta}{2} \{H, H_r\} + \frac{\chi'}{\chi \mathcal{E}_n} \{H, H_0\} + \dots \\ &\quad + \frac{\beta^2}{4} \sum_{\partial\mathcal{V} \cap \mathcal{V}_1} T_i \Phi^2 + \frac{\beta}{2} \sum_{\partial\mathcal{V} \cap \mathcal{V}_1} p_i \Phi, \end{aligned}$$

car  $\Phi = \bar{p}_i - p_i$ .

- Comme  $\{H, \Phi\} = -U'$  et  $U'$  est  $(v, \frac{u-1}{v})$ -homogène,  $\Phi$  est  $(v, u/v - 1/2)$ -homogène. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\beta}{2} \sum_{\partial \mathcal{V} \cap \mathcal{V}_1} p_i \Phi \varphi_n \right\|_2 &\lesssim \mathcal{E}_n^{-\frac{1}{2v} - \frac{1}{4}} \mathcal{E}_n^{\frac{u}{v} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2v}} \\ &\lesssim \mathcal{E}_n^{\frac{u}{v} - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement ce terme tend vers 0 dès que

$$u < \frac{v}{2},$$

et est borné si  $u = \frac{v}{2}$ .

- De manière analogue,  $\Phi^2$  est  $(v, 2u/v - 1)$ -homogène. Ainsi,

$$\left\| \frac{\beta^2}{4} \sum_{\partial \mathcal{V} \cap \mathcal{V}_1} T_i \Phi^2 \varphi_n \right\|_2 \lesssim \mathcal{E}_n^{-\frac{1}{2v} - \frac{1}{4}} \mathcal{E}_n^{\frac{2u}{v} - 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2v}} = \mathcal{E}_n^{\frac{2u}{v} - 1}$$

le terme en  $\Phi^2$  tend vers 0 dès que

$$u < \frac{v}{2},$$

et est borné dès que  $u = \frac{v}{2}$ .

Il nous reste donc à étudier les crochets de Poisson. D'une part,  $(q_0, p_0)$  ne dépend pas des  $(q_i, p_i)$  pour  $i \neq 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \{H, H_0\} &= \partial_{p_0} H \partial_{q_0} H_0 - \partial_{q_0} H \partial_{p_0} H_0 \\ &= p_0 \left( V'(q_0) - V'(q_0) - \sum_{j \in \mathcal{V}_1} U'(q_0 - q_j) \right) \\ &= -p_0 \sum_{j \in \mathcal{V}_1} U'(q_0 - q_j) \\ &:= \Phi_1. \end{aligned}$$

- En raisonnant comme dans le lemme II.6.5, on montre que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\chi'}{\chi \mathcal{E}_n} \Phi_1 \phi_n \right\|_2 &\lesssim \mathcal{E}_n^{-1} \mathcal{E}_n^{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2v}} \mathcal{E}_n^{\frac{1}{2} + \frac{u-1}{v} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2v}} \\ &\lesssim \mathcal{E}_n^{-\frac{1}{2} + \frac{u-1}{v}}. \end{aligned}$$

Ainsi, ce terme tend vers 0 dès que

$$u < \frac{v}{2} + 1,$$

et est borné si  $u = \frac{v}{2} + 1$ .

D'autre part, compte-tenu de la parité de  $V$  et  $U$ , on peut réécrire

$$\begin{aligned} H_r(\bar{q}, \bar{p}) &= \sum_{i \neq 0} \frac{\bar{p}_i^2}{2} + \sum_{i \in \mathcal{V}_1} \left( V(\bar{q}_i) + \sum_{i \prec j} U(\bar{q}_i - q_j) + \frac{1}{2} \sum_{i \approx j} U(q_i - q_j) \right) \\ &\quad + \sum_{i \notin \mathcal{V}_1 \cup \{0\}} \left( V(q_i) + \sum_{i \prec j} U(q_i - q_j) + \frac{1}{2} \sum_{i \approx j} U(q_i - q_j) \right). \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous constatons que le crochet suivant ne dépend pas de  $(q_0, p_0, \bar{q}_i, \bar{p}_i)$  et ainsi sa norme  $L^2$  tend vers 0 lorsque  $\mathcal{E}_n \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \left\{ H, \sum_{i \notin \mathcal{V}_1 \cup \{0\}} V(q_i) + \sum_{i \prec j} U(q_i - q_j) + \frac{1}{2} \sum_{i \approx j} U(q_i - q_j) \right\} &= - \sum_{i \in \mathcal{V}_2} p_i \sum_{j \prec i} U'(q_i - q_j) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{V}_1} \sum_{i \prec j} p_j U'(q_i - q_j). \end{aligned}$$

Il nous reste donc à évaluer

$$\underbrace{\sum_{\mathcal{V}_1} \left\{ H, \frac{\bar{p}_i^2}{2} \right\}}_I + \underbrace{\sum_{\mathcal{V}_1} \{H, V(\bar{q}_i)\}}_{II} + \underbrace{\sum_{\mathcal{V}_1} \sum_{i \prec j} \{H, U(\bar{q}_i - q_j)\}}_{III} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\mathcal{V}_1} \sum_{i \approx j} \{H, U(q_i - q_j)\}}_{IV}.$$

Soit,

$$\begin{aligned} I &= p_0 \partial_{q_0} \Phi \bar{p}_i - (V'(q_0) + \sum_{\mathcal{V}_1} U'(q_0 - q_i)) \partial_{p_0} \Phi \bar{p}_i - \bar{p}_i (V'(q_i) + \sum_{i \sim j} U'(q_i - q_j)) \\ &= -\bar{p}_i U'(q_0) - \partial_{p_0} \Phi \sum_{\mathcal{V}_1} U'(q_0 - q_i) \bar{p}_i - \bar{p}_i \left( V'(q_i) + \sum_{i \sim j} U'(q_i - q_j) \right), \\ II &= p_0 \partial_{q_0} \Phi^{(2)} V'(\bar{q}_i) - \left( V'(q_0) + \sum_{\mathcal{V}_1} U'(q_0 - q_i) \right) \partial_{p_0} \Phi^{(2)} V'(\bar{q}_i) + p_i V'(\bar{q}_i) \\ &= \Phi V'(\bar{q}_i) - \partial_{p_0} \Phi^{(2)} \sum_{\mathcal{V}_1} U'(q_0 - q_i) V'(\bar{q}_i) + p_i V'(\bar{q}_i) \\ &= \bar{p}_i V'(\bar{q}_i) - \partial_{p_0} \Phi^{(2)} \sum_{\mathcal{V}_1} U'(q_0 - q_i) V'(\bar{q}_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 III &= p_0 \sum_{i \prec j} U'(\bar{q}_i - q_j) \partial_{p_0} \Phi^{(2)} - (V'(q_0) + \dots \\
 &\quad \dots + \sum_{\mathcal{V}_1} U'(q_0 - q_i)) \sum_{i \prec j} U'(\bar{q}_i - q_j) \partial_{q_0} \Phi^{(2)} + \dots \\
 &\quad \dots + p_i \sum_{i \prec j} U'(\bar{q}_i - q_j) - \sum_{i \prec j} p_j U'(\bar{q}_i - q_j) \\
 &= \Phi \sum_{i \prec j} U'(\bar{q}_i - q_j) - \partial_{p_0} \Phi^{(2)} \sum_{\mathcal{V}_1} U'(q_0 - q_i) \sum_{i \prec j} U'(\bar{q}_i - q_j) + \dots \\
 &\quad \dots + p_i \sum_{i \prec j} U'(\bar{q}_i - q_j) - \sum_{i \prec j} p_j U'(\bar{q}_i - q_j) \\
 &= \bar{p}_i \sum_{i \prec j} U'(q_i - q_j) - \partial_{p_0} \Phi^{(2)} \sum_{\mathcal{V}_1} U'(q_0 - q_i) \sum_{i \prec j} U'(\bar{q}_i - q_j) - \dots \\
 &\quad \dots - \sum_{i \prec j} p_j U'(\bar{q}_i - q_j), \\
 IV &= \frac{p_i}{2} \sum_{j \approx i} U'(q_i - q_j) + \frac{1}{2} \sum_{j \approx i} p_j U'(q_j - q_i)
 \end{aligned}$$

Enfin, on regroupe les termes en  $\bar{p}_i$  pour obtenir (on omet les termes en dérivées de  $\Phi$  et  $\Phi^{(2)}$  obtenus précédemment) :

$$\bar{p}_i \left\{ V'(\bar{q}_i) - V'(q_i) + \sum_{i \prec j} U'(\bar{q}_i - q_j) - \sum_{i \sim j} U'(q_i - q_j) - U'(q_0) \right\} - \frac{\Phi}{2} \sum_{j \approx i} U'(q_i - q_j).$$

*Remarque.* Comme  $U$  est harmonique, le terme en  $q_0$  disparaît dans cette expression.

On étudie maintenant pour chacun des termes, en utilisant le lemme II.6.5, le comportement de sa norme  $L^2$  lorsque  $\mathcal{E}_n \rightarrow \infty$ .

- Le terme en  $\partial_{p_0} \Phi$  :

$$\mathcal{E}_n^{\left(\frac{u}{v}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_n^{\frac{u-1}{v}} (1 + \mathcal{E}_n^{u/v-1/2}).$$

Ainsi, ce terme tend vers 0 dès que

$$u < \frac{v}{2} + \frac{1}{2}.$$

- Le terme en  $\partial_{p_0} \Phi^{(2)}$  :

$$\mathcal{E}_n^{\left(\frac{u+1}{v}-1\right)-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_n^{\frac{u-1}{v}} \left( 1 + \mathcal{E}_n^{\left(\frac{u+1}{v}-1\right)(v-1)} \right) \lesssim \mathcal{E}_n^{\frac{3u+1}{v}-2}.$$

Ainsi, ce terme tend vers 0 dès que

$$u < \frac{3}{4}v.$$

- Le terme en  $\Phi$  :

$$\mathcal{E}_n^{\frac{u}{v}-\frac{1}{2}}.$$



Ainsi, ce terme tend vers 0 dès que

$$u < \frac{v}{2}.$$

- Le terme en  $\bar{p}_i$  :

$$\left(1 + \mathcal{E}_n^{\frac{u}{v} - \frac{1}{2}}\right) \left(\mathcal{E}_n^{(\frac{u+1}{v} - 1)(v-1)} + 1\right).$$

Ainsi, ce terme tend vers 0 dès que

$$u < \frac{v}{2}.$$

Finalement, en regroupant les évaluations précédentes, on obtient bien

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\mathcal{L}}\varphi_n\right\|_2 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, & 4 < v, \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|\tilde{\mathcal{L}}\varphi_n\right\|_2 &< +\infty, & 4 = v. \end{aligned}$$

□

---

# A - APPENDICE

---

Nous reproduisons ci-dessous l'article *The critical temperature of a Directed Polymer in a random environment* coécrit avec Ph. Carmona et accepté pour publication dans la revue *Markov Processes and Related Fields*.

## Abstract

In this paper, we find a necessary condition that ensures that the critical temperature of a directed polymer in a random environment is different from its lower bound obtained with the second moment method. Then we apply this criterion to the network  $\mathbb{Z}^d$  and different distributions of the environment.

**Keywords** : directed polymer, random environment, partition function.

**Mathematic Classification** : 60K37

## 1 Introduction

A large number of the disordered systems which have attracted the attention of mathematicians and physicists enjoy the following property. There exists a critical inverse temperature  $\beta^{(c)}$  such that for  $\beta < \beta^{(c)}$  (resp.  $\beta > \beta^{(c)}$ ) the annealed and quenched free energies are equal (resp. different).

Usually, a second moment method yields a lower bound  $\beta_2 \leq \beta^{(c)}$ . Whether the equality  $\beta_2 = \beta^{(c)}$  holds is an important issue which has received different answers. For example, there is equality for the Sherrington Kirkpatrick model of spin glasses with no external field, whereas there is no equality for the corresponding mean field model, the REM [Tal03].

For directed polymers in a random environment, we know that in general  $\beta_2 < \beta^{(c)}$  for the mean field model of the tree [BPP93, DES93], and the purpose of this paper is to show that on  $\mathbb{Z}^d$ , the answer depends on the dimension  $d$  and on the distribution of the environment.

Let  $\mathbf{P}$  be the distribution of simple random walk  $(\omega(n))_{n \in \mathbb{N}}$  on  $\mathbb{Z}^d$ , starting from the origin. The restriction of  $\mathbf{P}$  to the set of nearest neighbor paths of length  $n$

$$\Omega_n = \left\{ \omega \in (\mathbb{Z}^d)^{n+1} : \omega_0 = 0, \|\omega_i - \omega_{i-1}\| = 1, 1 \leq i \leq n \right\}$$

is the uniform measure.

Given a random environment  $(g(i, x))_{i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d}$ , a set of IID random variables under the probability  $\mathbf{Q}$ , having finite exponential moments

$$\lambda(\beta) = \ln \mathbf{Q}\left(e^{\beta g(1,1)}\right) < +\infty \quad (\beta \in \mathbb{R}),$$

we define the energy of a path of length  $n$  as  $H_n(\omega) = H_n(\omega, g) = \sum_{i=1}^n g(i, \omega_i)$  and the polymer measure

$$\mu_n(\omega) = \frac{1}{Z_n} e^{\beta H_n(\omega)}.$$

Hence the partition function is

$$Z_n = Z_n(\beta, g) = \mathbf{P}\left(e^{\beta H_n}\right) = \frac{1}{(2d)^n} \sum_{\omega \in \Omega_n} e^{\beta H_n(\omega)}.$$

As usual, the behavior of a typical path under the random measure  $\mu_n$  is dictated by the asymptotic behavior of the partition function.

E. Bolthausen [Bol89] showed that  $W_n = Z_n(\beta) e^{-n\lambda(\beta)}$  is a positive martingale, that converges almost surely to a finite random variable  $W_\infty$  that satisfies a 0-1 law :  $\mathbf{Q}(W_\infty = 0) \in \{0, 1\}$ .

By a clever use of FKG's inequality, Comets and Yoshida [CY06] proved the existence of a critical temperature  $\beta^{(c)}$  such that :

- for  $0 \leq \beta < \beta^{(c)}$ ,  $W_\infty > 0$ , a.s. (*weak disorder phase*);
- for  $\beta > \beta_c$ ,  $W_\infty = 0$ , a.s. (*strong disorder phase*).

Furthermore, they established a diffusive behavior in weak disorder, and Carmona and Hu [CH06] proved a non-diffusive behavior in strong disorder.

For dimensions  $d = 1, 2$  one can prove that  $\beta^{(c)} = 0$  (see [CH02, CY06]), therefore we shall restrict ourselves, in the following, to dimensions  $d \geq 3$ . Let us observe that it is believed (see [CH06]) that this critical temperature coincides with the annealed/quenched transition critical temperature  $\beta^{(c*)}$  which can be defined as

$$\beta^{(c*)} = \sup \{\beta > 0 : p(\beta) = \lambda(\beta)\}$$

with  $p(\beta)$  the (limit) free energy

$$p(\beta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbf{Q}(\ln Z_n(\beta)) = a.s. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(\beta).$$

To state our main result, we introduce  $p(t, x)$  the probability that two independent random walks starting from 0 meet for the first time  $t$  at level  $x$  :

$$p(t, x) = \mathbf{P}^{\otimes 2}(\omega_j^1 \neq \omega_j^2, 1 \leq j < t, \omega_t^1 = \omega_t^2 = x) \quad (t \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d).$$

Let

$$\begin{aligned} \rho(\alpha) &= \sum_{t,x} p(t, x)^{\alpha/2}, \quad \mathcal{D}_\rho = \{\alpha > 0, \rho(\alpha) < +\infty\} \\ h_\nu(\alpha) &= - \sum_{t,x} \left( \frac{p(t, x)^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)} \right) \ln \left( \frac{p(t, x)^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)} \right) = \ln \rho(\alpha) - \alpha \frac{\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)} \quad (\alpha \in \mathcal{D}_\rho). \end{aligned}$$

## 2. The fractional moment method

---

To avoid trivialities we shall assume that for  $2 - \epsilon < \alpha \leq 2$  we have

$$\beta_\alpha = \sup \{ \beta > 0 : \lambda(\alpha\beta) - \alpha\lambda(\beta) < -\ln \rho(\alpha) \} < +\infty,$$

and we consider another entropy

$$h_{\mathbf{Q}}(\alpha) = \mathbf{Q} \left( \left( \frac{e^{\alpha\beta_\alpha g}}{\mathbf{Q}(e^{\alpha\beta_\alpha g})} \right) \ln \left( \frac{e^{\alpha\beta_\alpha g}}{\mathbf{Q}(e^{\alpha\beta_\alpha g})} \right) \right) = \alpha\beta_\alpha \lambda'(\alpha\beta_\alpha) - \lambda(\alpha\beta_\alpha).$$

**Theorem 1.** *If  $h_\nu(2) < h_{\mathbf{Q}}(2)$  then  $\beta_2 < \beta^{(c)}$ .*

Although this criterion is based on Derrida and Evans Theorem 2 (see section 2), it is much simpler to use (numerically). We only need to compute one number  $h_\nu(2)$  for each graph  $\mathbb{Z}^d$ , instead of having to determine the whole function  $\alpha \rightarrow \rho(\alpha)$ .

Let us stress the fact that the criterion of Theorem 1 does not compare to the criterion of Birkner [Bir04] (which relies on an unpublished paper).

The structure of the paper is the following : section 2 contains Derrida and Evans Theorem, section 3 the proof of Theorem 1, section 4 some numerical applications to different distributions of the environment, and the appendix contains the computer programs we used.

## 2 The fractional moment method

We shall give a self contained proof of the following result of Derrida and Evans [DE92]

**Theorem 2.** *If there exists  $1 < \alpha \leq 2$  such that  $\lambda(\alpha\beta) - \alpha\lambda(\beta) < -\ln \rho(\alpha)$  then  $\beta \leq \beta^{(c)}$ .*

For  $\alpha = 2$ , we have  $\rho(2) = \mathbf{P}^{\otimes 2}(\exists t \geq 1, \omega_t^1 = \omega_t^2)$  and this is the second moment criteria (see Bolthausen [Bol89]).

*Démonstration.* The first step of the proof is the use of the following characterization of the weak disorder phase (see [CH02, CY06]) :

$$W_\infty > 0 \text{ a.s.} \iff (W_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ is Uniformly Integrable.}$$

Hence, if  $\sup_n \mathbf{Q}(W_n(\beta)^\alpha) < +\infty$  then we are in weak disorder and  $\beta \leq \beta^{(c)}$ . In order to obtain some improvement on the second moment method, we shall restrict ourselves to  $\alpha \in ]1, 2]$  and use the inequality (for  $\gamma = \alpha/2$ ) :

$$\left( \sum x_i \right)^\gamma \leq \sum x_i^\gamma, \quad \gamma \in [0, 1], \quad x_i \geq 0. \tag{A.1}$$

We first compute the second moment of  $Z_n$ . To do this we introduce two independent random walks and then split the expectations according to their meeting times : if  $r = (t_i, x_i, 1 \leq i \leq m) \in (\mathbb{N}_n \times \mathbb{Z}_n^d)^m$  we consider the event

$$\left\{ \omega^1 \stackrel{r}{=} \omega^2 \right\} = \left\{ \omega_{t_i}^1 = \omega_{t_i}^2 = x_i, 1 \leq i \leq m, \omega_t^1 \neq \omega_t^2, t \notin \{t_i\} \right\},$$

and compute

$$\begin{aligned} Z_n^2 &= \mathbf{P}^{\otimes 2} \left( e^{\beta(H_n(\omega^1) + H_n(\omega^2))} \right) \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{r \in (\mathbb{N}_n \times \mathbb{Z}_n^d)^m} Y(r), \quad \text{with } Y(r) = \mathbf{P}^{\otimes 2} \left( e^{\beta(H_n(\omega^1) + H_n(\omega^2))} \mathbb{1}_{\omega^1 \stackrel{r}{=} \omega^2} \right) \end{aligned}$$

Combining with inequality (A.1), we obtain,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(Z_n^\alpha) &= \mathbf{Q} \left( (Z_n^2)^{\alpha/2} \right) \\ &= \mathbf{Q} \left( \left\{ \sum_{m=0}^n \sum_r Y(r) \right\}^{\alpha/2} \right) \\ &\leq \sum_{m=0}^n \sum_r \mathbf{Q} \left[ Y(r)^{\alpha/2} \right]. \end{aligned}$$

Let's concentrate now on the quantity  $Y(r)$ . We define the partial Hamiltonian :

$$H_{j_1}^{j_2}(\omega) = \sum_{i=j_1+1}^{j_2} g(i, \omega_i).$$

We can thus decompose, noting  $\omega_{i,j} = (\omega_k)_{k \in \{t_i, \dots, t_j\}}$ ,  $t_0 = 0$  and  $t_{m+1} = n$ ,

$$\begin{aligned} Y(r) &= \mathbf{P} \left\{ \prod_{i=1}^m e^{\beta(H_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega^1) + H_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega^2))} \mathbb{1}_{\{\omega_{i-1,i}^1 \stackrel{(t_i, x_i)}{=} \omega_{i-1,i}^2\}} \right. \\ &\quad \left. \times e^{\beta(H_{t_m}^n(\omega^1) + H_{t_m}^n(\omega^2))} \mathbb{1}_{\{\omega_{m,m+1}^1 \neq \omega_{m,m+1}^2\}} \right\}. \\ &= \prod_{i=1}^m Y_{i-1,i} \times \tilde{Y}_{m,n}, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} Y_{i-1,i} &= \mathbf{P}^{\otimes 2} \left( e^{\beta(H_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega^1) + H_{t_{i-1}}^{t_i}(\omega^2))} \mathbb{1}_{(\omega_{t_j}^1 = \omega_{t_j}^2 = x_j, j=i-1, i; \omega_t^1 \neq \omega_t^2, t_{i-1} < t < t_i)} \right), \\ \tilde{Y}_{m,n} &= \mathbf{P}^{\otimes 2} \left( e^{\beta(H_{t_m}^n(\omega^1) + H_{t_m}^n(\omega^2))} \mathbb{1}_{(\omega_{t_m}^1 = \omega_{t_m}^2 = x_m; \omega_t^1 \neq \omega_t^2, t_m < t \leq n)} \right). \end{aligned}$$

## 2. The fractional moment method

---

Hence, using the independence of the environment with respect to the temporal evolution :

$$\mathbf{Q}[Z_n^\alpha] \leq \sum_{m=0}^n \sum_r \prod_{i=1}^m \mathbf{Q}[Y_{i-1,i}^{\alpha/2}] \mathbf{Q}[\tilde{Y}_{m,n}^{\alpha/2}].$$

Therefore, using Fatou's lemma,

$$\limsup_n \mathbf{Q}(W_n^\alpha) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d)^m} \prod_{i=1}^m \mathbf{Q}[Y_{i-1,i}^{\alpha/2}] \limsup_n \mathbf{Q}\left[\frac{\tilde{Y}_{m,n}^{\alpha/2}}{e^{n\alpha\lambda(\beta)}}\right].$$

Since the random walks never meet after time  $t_m$ , Jensen's inequality yields

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\left[\frac{\tilde{Y}_{m,n}^{\alpha/2}}{e^{n\alpha\lambda(\beta)}}\right] &\leq \mathbb{P}(\omega_j^1 \neq \omega_j^2, t_m < j \leq n; \omega_{t_m}^1 = \omega_{t_m}^2 = x_m)^{\alpha/2} e^{\alpha(n-t_m)\lambda(\beta)} \\ \limsup_n \mathbf{Q}\left[\frac{\tilde{Y}_{m,n}^{\alpha/2}}{e^{n\alpha\lambda(\beta)}}\right] &\leq q_d e^{-\alpha t_m \lambda(\beta)}, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} q_d &= \mathbb{P}(\omega_{t_m}^1 = \omega_{t_m}^2 = x_m, \omega_j^1 \neq \omega_j^2, j > t_m) \\ &= \mathbb{P}(\omega_j^1 \neq \omega_j^2, j > 0) \end{aligned}$$

thanks to Markov's property and since  $d \geq 3$ .

The environment is equally distributed, so we can write our upper bound

$$\begin{aligned} \limsup_n \mathbf{Q}[W_n^\alpha] &\leq q_d^{\alpha/2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d)^m} \prod_{i=1}^m \mathbf{Q}\left[e^{-\alpha(t_i - t_{i-1})\lambda(\beta)} Y_{i-1,i}^{\alpha/2}\right] \\ &\leq q_d^{\alpha/2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{t_1 \in \mathbb{N}, x_1 \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{Q}\left[e^{-\alpha t_1 \lambda(\beta)} Y_{0,1}^{\alpha/2}\right] \right\}^m. \end{aligned}$$

Thanks again to the independence of the environment, denoting  $(t, x) = (t_1, x_1)$  and using Jensen's inequality, we get

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\left[\frac{Y_{0,1}^{\alpha/2}}{e^{\alpha t \lambda(\beta)}}\right] &= e^{-\alpha t \lambda(\beta)} \mathbf{Q}\left[\mathbb{P}\left[e^{\beta \sum_{i=1}^{t-1} g(i, x_i^1) + g(i, x_i^2)} e^{2\beta g(t, x)} \mathbb{1}_{\omega^1(t, x) \omega^2}\right]^{\alpha/2}\right] \\ &= e^{-\alpha t \lambda(\beta)} e^{\lambda(\alpha\beta)} \mathbf{Q}\left[\mathbb{P}\left[e^{\beta \sum_{i=1}^{t-1} g(i, x_i^1) + g(i, x_i^2)} \mathbb{1}_{\omega^1(t, x) \omega^2}\right]^{\alpha/2}\right] \\ &\leq e^{\lambda(\alpha\beta) - \alpha t \lambda(\beta)} \mathbf{Q}\mathbb{P}\left[e^{\beta \sum_{i=1}^{t-1} g(i, x_i^1) + g(i, x_i^2)} \mathbb{1}_{\omega^1(t, x) \omega^2}\right]^{\alpha/2} \\ &= e^{\lambda(\alpha\beta) - \alpha t \lambda(\beta)} e^{2\frac{\alpha}{2}\lambda(\beta)(t-1)} \mathbb{P}\left(\omega^1(t, x) \omega^2\right)^{\alpha/2} \\ &= e^{\lambda(\alpha\beta) - \alpha \lambda(\beta)} p(t, x)^{\alpha/2}. \end{aligned}$$

Finally, we find the following upper bound :

$$\limsup_n \mathbf{Q} \left[ W_n^{\alpha/2} \right] \leq q_d^{\alpha/2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ e^{\lambda(\alpha\beta) - \alpha\lambda(\beta)} \rho(\alpha) \right\}^m.$$

Therefore, if there exists  $\alpha \in (1, 2]$  such that

$$\lambda(\alpha\beta) - \alpha\lambda(\beta) < -\ln \rho(\alpha),$$

then the martingale  $(W_n(\beta))_n$  is uniformly integrable.  $\square$

*Remark 1.* For a directed polymer on a tree, this method yields the critical temperature by letting  $\alpha \downarrow 1$ .

### 3 Proof of Theorem 1

Since we derive Theorem 1 from Theorem 2, we can wonder if we loose something in the process, but we shall see this is not the case for a Gaussian environment.

#### 3.1 The function $\rho$

Since  $0 \leq p(t, x) \leq 1$ , the function  $\rho$  is non increasing on  $(\alpha_0, +\infty)$  with  $\alpha_0 = \inf \{ \alpha > 0 : \rho(\alpha) < +\infty \}$ . The properties of  $\rho$  we use in the sequel are summarized in the

**Proposition 3.** *[(1)]*

$$\rho(2) = 1 - q_d = \mathbf{P}^{\otimes 2}(\exists t \geq 1, \omega_t^1 = \omega_t^2) < 1 \text{ (for } d \geq 3 \text{)}.$$

$$2. \quad \frac{4}{d} \leq \alpha_0 \leq 1 + \frac{2}{d} < 2.$$

$$3. \text{ There exists } 1 < \alpha_1 < 2 \text{ such that } \rho(\alpha_1) = 1.$$

*Démonstration.* (3) is an easy consequence of (2), (1) and the continuity of  $\rho$ . (1) We have :

$$\begin{aligned} \rho(2) &= \sum_{t,x} p(t, x) = \sum_t \mathbf{P}^{\otimes 2} \left( \mathbf{1}_{(\omega_j^1 \neq \omega_j^2, \forall j < t)} \sum_x \mathbf{1}_{(\omega_t^1 = \omega_t^2 = x)} \right) \\ &= \sum_t \mathbf{P}^{\otimes 2}(\omega_j^1 \neq \omega_j^2, \forall j < t; \omega_t^1 = \omega_t^2) \\ &= \mathbf{P}^{\otimes 2}(\exists t \geq 1, \omega_t^1 = \omega_t^2). \end{aligned}$$

**The lower bound.** For  $1 \leq \alpha \leq 2$ , we have by inequality (A.1),

$$\begin{aligned} \rho(\alpha) &= \sum_{t \geq 1} \sum_x p(t, x)^{\alpha/2} \geq \sum_{t \geq 1} \left( \sum_x p(t, x) \right)^{\alpha/2} \\ &= \sum_t \mathbf{P}^{\otimes 2}(\omega_t^1 = \omega_t^2, \omega_j^1 \neq \omega_j^2, \forall j < t)^{\alpha/2} \end{aligned}$$

### 3. Proof of Theorem 1

---

Since Griffin [Gri90] proved that

$$\mathbf{P}^{\otimes 2}(\omega_t^1 = \omega_t^2, \omega_j^1 \neq \omega_j^2, \forall j < t) \asymp \mathbf{P}^{\otimes 2}(\omega_t^1 = \omega_t^2) \asymp \mathbf{P}(\omega_{2t} = 0) \asymp t^{-d/2},$$

we see that  $\rho(\alpha) = +\infty$  when  $\alpha \leq 4/d$ .

**The upper bound.** If we suppress the avoiding condition in the definition of  $p(t, x)$  we obtain

$$p(t, x) \leq r(t, x)^2, \quad \text{with} \quad r(t, x) = \mathbf{P}(\omega_t = x).$$

We are going to prove that  $\sum r(t, x)^\alpha < +\infty$  if  $\alpha > 1 + 2/d$  and this will imply that  $\alpha_0 \leq 1 + 2/d$ .

First we apply the local central limit theorem (see Theorem 1.2.1 of Lawler [Law91]) :

$$\sup_x |r(t, x) - \bar{r}(t, x)| \leq Ct^{-1+d/2}$$

and thus we shall prove that  $\bar{\rho}(\alpha) = \sum \bar{r}(t, x)^\alpha < +\infty$ , if  $\alpha > 1 + 2/d$ , with

$$\bar{r}(t, x) = 2 \left( \frac{d}{2\pi t} \right)^{d/2} e^{-\frac{d|x|^2}{2t}}.$$

Since,

$$N(\sqrt{R}) = \sharp \left\{ x \in \mathbb{Z}^d, \sqrt{R} \leq x \leq \sqrt{R} + 1 \right\} \sim C_d R^{d/2-1}$$

we need to show that

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha d/2}} \sum_{R=1}^t R^{d/2-1} e^{-\frac{\alpha d R}{2t}} < +\infty$$

Comparing series and integral for a monotone function, this amounts to check that

$$\sum_{R \geq 1} R^{d/2-1} \int_R^{+\infty} t^{-\alpha d/2} e^{-\frac{\alpha d}{2t} R} dt = \left( \int_1^{+\infty} u^{-\alpha d/2} e^{-\frac{\alpha d}{2u}} du \right) \sum_{R \geq 1} R^{\frac{d}{2}(1-\alpha)} < +\infty$$

and this is satisfied since  $\alpha > 1 + 2/d$ . □

### 3.2 The proof of Theorem

Fix  $\alpha \in (2 - \epsilon, 2]$ , so that if

$$\Psi(\alpha, \beta) = \lambda(\alpha\beta) - \alpha\lambda(\beta) + \ln \rho(\alpha),$$

the function  $\beta \rightarrow \Psi(\alpha, \beta)$  has the following properties :

- It is  $C^1$  and  $\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = \alpha(\lambda'(\alpha\beta) - \lambda'(\beta)) > 0$  for  $\beta > 0$  since  $\lambda$  is strictly convex (for a non degenerate environment).
- $\Psi(\alpha, 0) = \ln \rho(\alpha) < 0$  if  $\epsilon$  is small enough since  $\rho(2) = 1 - q_d < 1$ .
- There exists  $\beta > 0$  such that  $\Psi(\alpha, \beta) > 0$  by assumption.



Therefore, there is a unique  $\beta_\alpha > 0$  such that  $\Psi(\alpha, \beta_\alpha) = 0$ .

If we prove that  $\frac{\partial \beta_\alpha}{\partial \alpha} |_{\alpha=2} < 0$  then we are done, since there exists then  $\alpha \in (1, 2)$  such that  $\beta_\alpha > \beta_2$ , and thus, by definition of  $\beta_\alpha$ , there exists  $\gamma \in (\beta_2, \beta_\alpha)$  such that  $\Psi(\alpha, \gamma) < 0$  and we apply Theorem 2.

By the implicit function theorem, we have

$$\frac{\partial \beta_\alpha}{\partial \alpha} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(\alpha, \beta_\alpha)}{\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}(\alpha, \beta_\alpha)}$$

and thanks to  $\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = \alpha(\lambda'(\alpha\beta) - \lambda'(\beta)) > 0$  we only need to prove that  $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} > 0$ .

A straightforward computation yields

$$\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(\alpha, \beta_\alpha) = h_{\mathbf{Q}}(\alpha) - h_\nu(\alpha),$$

therefore if  $h_{\mathbf{Q}}(2) - h_\nu(2) > 0$ , then  $\beta \leq \beta^{(c)}$ .

### 3.3 In a Gaussian environment

We have  $\lambda(\beta) = \beta^2/2$ , therefore for any  $\alpha \geq \alpha_1$  (that is  $\rho(\alpha) \leq 1$ ), we have

$$\beta_\alpha = 2 \left( -\frac{\ln \rho(\alpha)}{\alpha(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tedious but straightforward computations yield successively

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left( \frac{\beta_\alpha^2}{2} \right) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha(\alpha - 1)}, \quad \text{with } \Gamma(\alpha) = (2\alpha - 1) \ln \rho(\alpha) - (\alpha - 1) \frac{\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)}, \\ \partial_\alpha \Gamma(\alpha) &= 2 \ln \rho(\alpha) - \alpha(\alpha - 1) \text{Var}_{\nu_\alpha}(\ln p(\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}) < 0 \end{aligned}$$

with  $\nu_\alpha$  the probability measure defined on  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^d$  by  $\nu(t, x) = \frac{p(t, x)^{\alpha/2}}{\rho(\alpha)}$ .

Therefore, the function  $\alpha \rightarrow \beta_\alpha$  is concave, and the assumptions  $h_{\mathbf{Q}}(2) - h_\nu(2) > 0$ , that is  $\partial_\alpha \beta_\alpha |_{\alpha=2} < 0$ , and  $\exists \alpha < 2, \beta_\alpha > \beta_2$  are equivalent, so Theorem 1 is not weaker than Theorem 2 in the Gaussian case.

## 4 Numerical Results

Griffin [Gri90] has obtained very accurate values for the numbers

$$q_d = \mathbf{P}^{\otimes 2}(\forall t \geq 1, \omega_t^1 \neq \omega_t^2).$$

We have computed approximate values of  $h_\nu(2) = \ln \rho(2) - 2\rho'(2)/\rho(2)$ , with  $\rho(2) = 1 - q_d$ , by generating  $N \sim 50000$  random walks of length  $n = 1000$  and looking at their first crossing times. We have obtained correct values of  $\tilde{q}_d$  (very close to  $q_d$ ) :

#### 4. Numerical Results

---

$d$	$1 - q_d$	$\tilde{q}_d - q_d$	$h_\nu(2)$
3	0.340	-0.005	4.808
4	0.193	-0.003	3.855
5	0.135	-0.001	3.608

Then we computed  $h_{\mathbf{Q}}(2) = 2\beta_2\lambda'(2\beta_2) - \lambda(2\beta_2)$  for different distributions of the environment.

$d$	$h_\nu(2)$	$h_{\mathbf{Q}}(2) : \text{Binomial}$	$h_{\mathbf{Q}}(2) : \text{Poisson}$	$h_{\mathbf{Q}}(2) : \text{Gaussian}$
3	4.808	4.14	6.418	2.158
4	3.855	6.228	10.295	3.29
5	3.608	7.421	12.726	4.004

On the one hand, it is easy to prove that the function  $d \rightarrow h_{\mathbf{Q}}(2)$  is non decreasing. On the other hand, we expect the function  $d \rightarrow h_\nu(2)$  to be non increasing, but we are unable to prove it. Consequently, we can see that the critical dimension for our criteria is 4 for Binomial, 3 for Poisson and 5 for Gaussian environments.

The three environments are symmetric, and we give their characteristics. For the Binomial environment,  $|g(1, 1)|$  is binomial with parameters  $n = 5$  and  $p = 0.01$ . For the Poisson environment,  $|g(1, 1)|$  is Poisson of parameter  $k = 0.0001$ .

We observed that, in opposition to the two others environment, the Gaussian behavior does not depend on the variance.

### Appendix : the program

We give here the matlab program used to compute  $p(t, x)$ . The result is a row vector. This vector doesn't contain the information of which  $t$  and which  $x$  are considered.

(cf. partie [I.2.6](#))



---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Bas98] Richard F. BASS : *Diffusions and elliptic operators*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Bir04] Matthias BIRKNER : A condition for weak disorder for directed polymers in random environment. *Electron. Comm. Probab.*, 9:22–25 (electronic), 2004.
- [BO05] Cédric BERNARDIN et Stefano OLLA : Fourier’s law for a microscopic model of heat conduction. *J. Stat. Phys.*, 121(3-4):271–289, 2005.
- [Bol89] Erwin BOLTHAUSEN : A note on the diffusion of directed polymers in a random environment. *Comm. Math. Phys.*, 123(4):529–534, 1989.
- [Bol07] François BOLLEY : Separability and completeness for the wasserstein distance. <http://www.ceremade.dauphine.fr/~bolley/wasserstein.pdf>, 2007.
- [BPP93] Emmanuel BUFFET, A. PATRICK et Joe V. PULÉ : Directed polymers on trees : a martingale approach. *J. Phys. A*, 26(8):1823–1834, 1993.
- [BRO07] Nawaf BOU-RABEE et Houmane OWHADI : Ergodicity of Langevin processes with degenerate diffusion in momentums. <http://arxiv.org/abs/0710.4259>, 2007.
- [Car07] Philippe CARMONA : Existence and uniqueness of an invariant measure for a chain of oscillators in contact with two heat baths. *Stochastic Process. Appl.*, 117(8):1076–1092, 2007.
- [Car08] Philippe CARMONA : Directed polymers in random environment and last passage percolation. preprint, 2008.
- [CH02] Philippe CARMONA et Yueyun HU : On the partition function of a directed polymer in a Gaussian random environment. *Probab. Theory Related Fields*, 124(3):431–457, 2002.
- [CH04] Philippe CARMONA et Yueyun HU : Fluctuation exponents and large deviations for directed polymers in a random environment. *Stochastic Process. Appl.*, 112(2):285–308, 2004.
- [CH06] Philippe CARMONA et Yueyun HU : Strong disorder implies strong localization for directed polymers in a random environment. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 2:217–229 (electronic), 2006.
- [CKM01] René CARMONA, Leonid KORALOV et Stanislav MOLCHANOV : Asymptotics for the almost sure Lyapunov exponent for the solution of the parabolic Anderson problem. *Random Oper. Stochastic Equations*, 9(1):77–86, 2001.

- 
- [CMS02] Michael CRANSTON, Thomas S. MOUNTFORD et Tokuzo SHIGA : Lyapunov exponents for the parabolic Anderson model. *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 71(2):163–188, 2002.
  - [CSY03] Francis COMETS, Tokuzo SHIGA et Nobuo YOSHIDA : Directed polymers in a random environment : path localization and strong disorder. *Bernoulli*, 9(4):705–723, 2003.
  - [CSY04] Francis COMETS, Tokuzo SHIGA et Nobuo YOSHIDA : Probabilistic analysis of directed polymers in a random environment : a review. In *Stochastic analysis on large scale interacting systems*, volume 39 de *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 115–142. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.
  - [CV06] Francis COMETS et Vincent VARGAS : Majorizing multiplicative cascades for directed polymers in random media. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 2:267–277 (electronic), 2006.
  - [CY06] Francis COMETS et Nobuo YOSHIDA : Directed polymers in random environment are diffusive at weak disorder. *Ann. Probab.*, 34(5):1746–1770, 2006.
  - [DE92] Bernard DERRIDA et Martin R. EVANS : Improved bounds for the transition temperature of directed polymers in a finite-dimensional random medium. *J. Stat. Phys.*, 69(1-2):427–437, 1992.
  - [DES93] Bernard DERRIDA, Martin R. EVANS et Eugene R. SPEER : Mean field theory of directed polymers with random complex weights. *Comm. Math. Phys.*, 156(2):221–244, 1993.
  - [DP06] Giuseppe DA PRATO : *An introduction to infinite-dimensional analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Revised and extended from the 2001 original by Da Prato.
  - [DPZ96] Giuseppe DA PRATO et Jerzy ZABCZYK : *Ergodicity for infinite dimensional systems*, volume 229 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
  - [Dur96] Richard DURRETT : *Probability : theory and examples*. Duxbury Press, Belmont, CA, second édition, 1996.
  - [EH00] Jean-Pierre ECKMANN et Martin HAIRER : Non-equilibrium statistical mechanics of strongly anharmonic chains of oscillators. *Comm. Math. Phys.*, 212(1):105–164, 2000.
  - [EPRB99a] Jean-Pierre ECKMANN, Claude-Alain PILLET et Luc REY-BELLET : Entropy production in nonlinear, thermally driven Hamiltonian systems. *J. Statist. Phys.*, 95(1-2):305–331, 1999.
  - [EPRB99b] Jean-Pierre ECKMANN, Claude-Alain PILLET et Luc REY-BELLET : Non-equilibrium statistical mechanics of anharmonic chains coupled to two heat baths at different temperatures. *Comm. Math. Phys.*, 201(3):657–697, 1999.
  - [EZ04] Jean-Pierre ECKMANN et Emmanuel ZABEY : Strange heat flux in (an)harmonic networks. *J. Statist. Phys.*, 114(1-2):515–523, 2004.

- [Gri90] Peter GRIFFIN : Accelerating beyond the third dimension : returning to the origin in simple random walk. *Math. Sci.*, 15(1):24–35, 1990.
- [GW69] K. GUSTAFSON et Joachim WEIDMANN : On the essential spectrum. *J. Math. Anal. Appl.*, 25:121–127, 1969.
- [Hai05] Martin HAIRER : On the controllability of conservative systems. <http://arxiv.org/abs/math-ph/0506064>, 2005.
- [Hai07] Martin HAIRER : Ergodic properties of a class of non-markovian processes. <http://arxiv.org/abs/0708.3338>, 2007.
- [HH85] David A. HUSE et Christopher L. HENLEY : Pinning and roughening of domain walls in ising systems due to random impurities. *Phys. Rev. Lett.*, 54(25):2708–2711, Jun 1985.
- [HM06] Martin HAIRER et Jonathan C. MATTINGLY : Ergodicity of the 2D Navier-Stokes equations with degenerate stochastic forcing. *Ann. of Math. (2)*, 164(3):993–1032, 2006.
- [HM07] Martin HAIRER et Jonathan C. MATTINGLY : Slow energy dissipation in anharmonic oscillator chains. <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0712.3884>, 2007.
- [Hör83] Lars HÖRMANDER : *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Distribution theory and Fourier analysis.
- [Hör85] Lars HÖRMANDER : *The analysis of linear partial differential operators. III*, volume 274 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Pseudodifferential operators.
- [IK74] Kanji ICHIHARA et Hiroshi KUNITA : A classification of the second order degenerate elliptic operators and its probabilistic characterization. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 30:235–254, 1974.
- [IK04] Henryk IWANIEC et Emmanuel KOWALSKI : *Analytic number theory*, volume 53 de *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [IS88] John Z. IMBRIE et Thomas SPENCER : Diffusion of directed polymers in a random environment. *J. Statist. Phys.*, 52(3-4):609–626, 1988.
- [Law91] Gregory F. LAWLER : *Intersections of random walks*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1991.
- [Lig85] Thomas M. LIGGETT : *Interacting particle systems*, volume 276 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Liu98] Quansheng LIU : Fixed points of a generalized smoothing transformation and applications to the branching random walk. *Adv. in Appl. Probab.*, 30(1):85–112, 1998.

- [LL07] Zonghua LIU et Baowen LI : Heat conduction in simple networks : The effect of inter-chain coupling. *Physical Review E*, 76:051118, 2007.
- [LS04] Raphaël LEFEVERE et Alain SCHENKEL : Perturbative analysis of anharmonic chains of oscillators out of equilibrium. *J. Statist. Phys.*, 115(5-6):1389–1421, 2004.
- [Mat07] Jonathan C. MATTINGLY : Ergodicity of dissipative spdes. Saint-Flour lecture notes, 2007.
- [MCRT08] David MARQUEZ-CARRERAS, Carles ROVIRA et Samy TINDEL : A model of continuous time polymer on the lattice. <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0802.3296>, 2008.
- [MNV03] Christian MAES, Karel NETOČNÝ et Michel VERSCHUERE : Heat conduction networks. *J. Statist. Phys.*, 111(5-6):1219–1244, 2003.
- [MT93] Sean P. MEYN et Richard L. TWEEDIE : Stability of Markovian processes. III. Foster-Lyapunov criteria for continuous-time processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 25(3):518–548, 1993.
- [Nua98] David NUALART : Analysis on Wiener space and anticipating stochastic calculus. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1995)*, volume 1690 de *Lecture Notes in Math.*, pages 123–227. Springer, Berlin, 1998.
- [OS96] Peder OLSEN et Renming SONG : Diffusion of directed polymers in a strong random environment. *J. Statist. Phys.*, 83(3-4):727–738, 1996.
- [Phe66] Robert R. PHELPS : *Lectures on Choquet's theorem*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1966.
- [RB03] Luc REY-BELLET : Statistical mechanics of anharmonic lattices. In *Advances in differential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 2002)*, volume 327 de *Contemp. Math.*, pages 283–298. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [RB06] Luc REY-BELLET : Ergodic properties of Markov processes. In *Open quantum systems. II*, volume 1881 de *Lecture Notes in Math.*, pages 1–39. Springer, Berlin, 2006.
- [RBT02] Luc REY-BELLET et Lawrence E. THOMAS : Exponential convergence to non-equilibrium stationary states in classical statistical mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 225(2):305–329, 2002.
- [RY05] Daniel REVUZ et Marc YOR : *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, third édition, 2005. 3rd Corrected printing.
- [Sas99] Shankar SASTRY : *Nonlinear systems*, volume 10 de *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999. Analysis, stability, and control.

- [SV72] Daniel W. STROOCK et Srinivasa R. S. VARADHAN : On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle. *In Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. III : Probability theory*, pages 333–359, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.
- [Tal03] Michel TALAGRAND : Mean field models for spin glasses : a first course. *In Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 2000)*, volume 1816 de *Lecture Notes in Math.*, pages 181–285. Springer, Berlin, 2003.
- [ÜZ00] A. Süleyman ÜSTÜNEL et Moshe ZAKAI : *Transformation of measure on Wiener space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [Var07] Vincent VARGAS : Strong localization and macroscopic atoms for directed polymers. *Probab. Theory Related Fields*, 138(3-4):391–410, 2007.
- [Wil91] David WILLIAMS : *Probability with martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [Won79] W. Murray WONHAM : *Linear multivariable control : a geometric approach*, volume 10 de *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1979.
- [Wu01] Liming WU : Large and moderate deviations and exponential convergence for stochastic damping Hamiltonian systems. *Stochastic Process. Appl.*, 91(2):205–238, 2001.





---

# TABLE DES FIGURES

---

I.1	Polymère dirigé dans $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	7
I.2	Polymère sur un arbre régulier à 2 branches . . . . .	8
I.3	Schéma de deux marches aléatoires se rencontrant en $(t_i, x_i)$ . . . . .	15
I.4	Graphe de la fonction $\rho$ en dimension $d = 3$ . . . . .	19
I.5	La loi de Poisson de paramètre 0.01 . . . . .	27
I.6	Polymère dirigé en temps continu : $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{Exp}(\kappa)$ . . . . .	32
II.1	Un réseau d'oscillateurs : le diamant . . . . .	47
II.2	Exemples de graphes satisfaisant la condition d'asymétrie (en noir les atomes reliés à des thermostats) . . . . .	57
II.3	Chaîne à 5 atomes . . . . .	58
II.4	Réseau à 4 atomes . . . . .	58
II.5	La condition d'asymétrie sur un réseau circulaire d'oscillateurs . . . . .	59
II.6	Exemple de réseau ne satisfaisant pas la condition (II.9) de Hörmander en tout point . . . . .	76
II.7	Dynamique du système hamiltonien en l'absence de bruit . . . . .	83
II.8	Description du temps d'atteinte déterministe . . . . .	83
II.9	Illustration de la propriété de contrôlabilité faible . . . . .	89
II.10	Courbe $\Gamma$ et changement d'échelle . . . . .	100

---

# INDEX

---

- $[\cdot, \cdot]$ , 5
- $\asymp$ , 5
- $\equiv$ , 5
- $\stackrel{r}{=}$ , 15
- $|\cdot|$ , 5
- $\{\cdot\}$ , 50
- $^\circ$ , 5
- $(\alpha_c, \beta_{\alpha_c})$ , 24
- $\alpha_0$ , 18, 19
- $\beta_c$ , 10
- $\beta$ , 9
- $\beta_\alpha$ , 22, 25
- $\tilde{\beta}_c$ , 11
- $\Gamma$ , 60
- $\gamma$ , 41
- $\Delta$ , 32, 42, 56
- $\delta$ , 26
- $\theta_t$ , 35
- $\kappa$ , 32
- $\Lambda$ , 56
- $\lambda$ , 9
- $\mu_H$ , 52
- $\mu_n$ , 9
- $\mu_t$ , 32, 38
- $\nu_\alpha$ , 25
- $\rho$ , 13, 18
- $\Omega$ , 37
- $\Omega_n$ , 8
- $\Omega_{I,j}$ , 41
- $\omega$ , 60
- $\omega^1, \omega^2$ , 13
- Adjacence, matrice d', 56
- Anderson parabolique, 33, 40
- Arbre, 8, 13, 19, 24
- Asymétrie, 56, 85, 88
- $\mathcal{B}$ , 5
- Boltzmann, 1
- $\mathcal{C}^-$ , 80
- Contrôlabilité
  - faible, 89
  - forte, 87
- Cumulant, 9, 25
- $DZ_t^z$ , 64
- $d(\mu, \nu)$ , 62
- $d_i$ , 56
- Désordre, 11
  - faible, 10
  - fort, 10
- Dirac, 26
- $(e_i)$ , 5, 56
- $E_{\Delta, \partial \nu}$ , 56
- Énergie libre, 9, 11, 33, 35
- Entropie, 13, 22
- Environnement, 8
- $\mathcal{F}_t$ , 32
- Fokker-Planck, équation de, 50
- Fonction de partition, 2, 9, 10, 32
  - point à point, 32, 39
- Fortement fellerien, 50, 68
  - asymptotiquement, 68
- $g$ , 8
- Générateur, 32, 42, 50
- Gaussien, 25, 27
- Gibbs, mesure de, 1, 52
- Graphe, 48

- $H_i^j$ , 16
- $H_n$ , 9
- $H_t$ , 32, 42
- $\dot{H}$ , 81
- $h_{\mathbf{Q}}$ , 13
- $h_\nu$ , 13
- Hörmander, 67, 74
- Hamiltonien
  - polymère, 9, 32
  - réseaux, 48
- Harmoniques, 56
- Hypoelliptique, 67
  
- $I_\partial$ , 60
- $I_s$ , 38
- Invariante, 50
- Irréductible, 93
  
- Krylov-Bogoliubov, 94
  
- $\mathcal{L}$ , 32, 42, 50
- $\mathcal{L}^*$ , 50
- $\mathfrak{L}$ , 67
- $\mathfrak{L}_0$ , 67
- $\widetilde{\mathcal{L}}$ , 99
- Laplacien, 32, 42, 56, 61
- Lasalle, 81
- Lie, 67
- Lyapunov, fonction de, 50
  
- Malliavin, 36
- Markov, 35
- Mesure polymère, 9, 32
- Moment d'ordre 2, 12, 18
- Moments fractionnaires, 15, 25
  
- $N$ , 48
- $N(\gamma, I)$ , 41
- $\mathbb{N}_n$ , 5
- $n$ , 49
  
- Ordre, 60
  
- $P_t$ , 42, 49
- $P_t^*$ , 50
- $\mathbf{P}$ , 9
  
- $p$ , 11
- $p(\kappa, \beta)$ , 33
- $p(t, x)$ , 13
- $p_i$ , 48
- $p_n$ , 9
- $p_t(x)$ , 32
- $p_{t,x}$ , 20
- Poincaré, 92
- Point fixe, théorème de, 63
- Poisson, crochet de, 50
- Polymère dirigé, 8
- Principe de grandes déviations, 11
  
- $\mathbf{Q}$ , 9, 32
- $q_d$ , 17, 18, 24
- $q_i$ , 48
  
- Récurrence, 91
- Régulier, 57
- Répliques, 12
- Rigidité, 4, 97
  
- Semigroupe, 42, 49
- Sous-additivité, 35, 40, 41
- Spectre essentiel, 99
- Stabilité, 61, 81, 85
- Stroock-Varadhan, 80
- Support, 70
  
- $T_i$ , 49
  
- $U$ , 48
  
- $V$ , 48
- $\mathcal{V}$ , 3, 48
- $\partial\mathcal{V}$ , 3, 49
- Variation totale, 71
  
- $W(\beta; x, y)$ , 32
- $W_n$ , 10
- $W_t$ , 32
- Wasserstein, 62
- Weyl, 99
  
- $Z_n$ , 9
- $Z_t^z$ , 49
- $\mathbb{Z}_n$ , 5



**Résumé :** Dans cette thèse, nous étudions deux exemples issus de la mécanique statistique. Les polymères dirigés en environnement aléatoire sont un modèle de système se trouvant à l'état d'équilibre. Nous donnons un critère de comparaison entre les entropies du réseau et de l'environnement permettant d'améliorer la borne inférieure sur la température critique. Nous utilisons également certains résultats connus dans le cadre de l'équation d'Anderson parabolique pour obtenir le comportement asymptotique de l'énergie libre. Par ailleurs, nous utilisons les polymères dirigés pour donner une preuve simple de l'indépendance de la fonction de Lyapunov de l'équation d'Anderson parabolique par rapport à la condition initiale.

Les réseaux conducteurs de chaleur sont étudiés hors équilibre. Lorsque les potentiels d'interaction sont harmoniques, nous donnons une interprétation géométrique de la condition d'existence et d'unicité de la mesure invariante via un théorème de complétude. Dans le cas où cette condition fait défaut, nous explicitons une quantité invariante par le flot hamiltonien. Nous généralisons ensuite les résultats d'unicité à des potentiels analytiques. Nous montrons que la condition de Hörmander est suffisante pour avoir l'unicité de la mesure invariante via la contrôlabilité. Le principe de Lasalle est ensuite utilisé pour montrer l'unicité sans la condition d'Hörmander. Nous évoquons également le problème de l'existence de telles mesures.

**Mots clés :** Polymères dirigés en environnement aléatoire - Transitions de phase - Équation d'Anderson Parabolique - Réseaux conducteurs de chaleur - Mesures invariantes - Principe de Lasalle - Condition de Hörmander - Contrôlabilité.

**Summary :** This PhD thesis presents two examples arising in statistical mechanics. Directed polymers in random environment are a model of an equilibrium system. We give a criterium based on the comparison between network and environment entropies to provide an improved lower bound on the critical temperature. We also use some well-known results about Anderson Parabolic Equation to obtain an asymptotic on the free energy. We also use directed polymers to give a simple proof of the independance on the initial condition of the Lyapunov function in the Anderson Parabolic Equation.

Heat conduction networks are studied out of equilibrium. When the interacting potentials are harmonic, we give a geometric interpretation of the existence and uniqueness of the invariant measure using a completeness theorem. When this geometric condition fails to occur, we give an explicit invariant of the Hamiltonian flow. We generalize the uniqueness results to analytic potentials. We also show that the Hörmander condition is sufficient to obtain uniqueness of the invariant measure via weak controlability. Lasalle's principle is used to avoid Hörmander's condition. We will also bring up the problem of existence.

**Key words :** Directed Polymers in Random Environment - Phase Transition - Parabolic Anderson Equation - Heat Conduction Networks - Invariant Measures - Lasalle Principle - Hörmander Condition - Controlability.